
Tweezijdigheid in de Representatie en Verwerking van Imprecieze Informatie

Chris Cornelis

Licentiaat in de Informatica, optie Formele Informatica

Proefschrift voorgelegd aan
de Faculteit Wetenschappen van de Universiteit Gent
tot het krijgen van de graad van
Doctor in de Wetenschappen, richting Informatica

Promotor:

Prof. Dr. Etienne E. Kerre

januari 2004



Faculteit Wetenschappen

The sun rises in the east and
yang is born;
The sun sets in the west and
yin prevails;
The mystical east is the source
of inner wisdom;
The practical west is the focus
for worldly attainment;
Individually they each lack
something;
Together they have it all.

(“East and West”
Richard Lawrence)

Une idée forte communique un peu de sa force au contradicteur.

Participant à la valeur universelle des esprits, elle s'insère,
se greffe en l'esprit de celui qu'elle réfute, au milieu d'idées
adjacentes, à l'aide desquelles, reprenant quelque avantage,
il la complète, la rectifie;
si bien que la sentence finale est en quelque sorte l'oeuvre
des deux personnes qui discutaient.

(Marcel Proust)

Inhoudsopgave

Voorwoord	7
1 Inleiding	9
2 Een Verkennde Studie	15
2.1 Logische en Ordetheoretische Structuren	16
2.1.1 Posets, Tralies en Boole-algebra's	16
2.1.2 Veralgemeende Logische Connectieven op Tralies	18
2.1.3 Geresidueerde Tralies en MV-algebra's	24
2.1.4 Bitralies	27
2.2 Verzamelingtheoretische Structuren	29
2.2.1 L -vaagverzamelingen	29
2.2.2 Wazigverzamelingen	35
2.2.3 Ruwverzamelingen	36
2.2.4 Tweevoudige Vaagverzamelingen	42
3 Tweezijdigheid in de Extensies van Vaagverzamelingen	47
3.1 L^* als Logische Evaluatiestructuur	48
3.1.1 Negatoren	48
3.1.2 Triangulaire Normen en Conormen	49
3.1.3 Implicatoren	50
3.1.4 Representatiestellingen, Geresidueerde Tralies en MV-Algebra's	53
3.2 Inclusiematrizen op L^*	56
3.2.1 Tweewaardige Alternatieven voor Klassieke Inclusie	57
3.2.2 Meerwaardige Alternatieven voor Klassieke Inclusie	59
3.3 L^* -Vaagrelationele Beelden	71
3.3.1 Definities	73
3.3.2 Eigenschappen van Directe en Superdirecte Beelden	75
3.3.3 Verdeel en Heers	79
3.4 Tweezijdigheid: de Aard van het Beestje	81
3.4.1 De Kip of het Ei?	82
3.4.2 Vierkanten en Driehoeken—IWVs en IVs Binnen een Rui- mer Kader	82

3.4.3	Op een Kruispunt van Imprecisie	85
4	Hybridisering van Vaagheid en Ruwheid	87
4.1	Historiek	87
4.2	Onder- en Bovenbenadering in een Vaagbenaderingsruimte	89
4.3	Alternatieve Benaderingsoperatoren	90
4.4	Toepassingen van Vaagruwverzamelingen	95
4.4.1	Toepassing in Datatabellen	95
4.4.2	Toepassing in Intelligente Informatie–Ophaling	98
4.5	L^* –Vaagruwverzamelingen	101
5	Regelgebaseerde Systemen	103
5.1	Grondslagen van Benaderend Redeneren	104
5.1.1	Karakterschets	104
5.1.2	Positieve en Negatieve Informatie in de Possibiliteitsleer .	109
5.1.3	Anatomie van een Vaagregel	112
5.1.4	Vaaginferentie	114
5.1.5	Algoritmische Complexiteit	133
5.2	Redeneren door Analogie	135
5.2.1	Similariteit en Extensionaliteit	136
5.2.2	Similariteitsgebaseerd Redeneren	141
5.2.3	Inclusiegebaseerd Redeneren	143
6	Ontginning van Vaagassociatieregels	149
6.1	Herkomst en Motivatie	150
6.2	Positieve en Negatieve Voorbeelden	152
6.2.1	Scherpe Associatieregels	153
6.2.2	Vaagassociatieregels	156
6.3	Semantiek van Kwaliteitsmaten	157
6.3.1	Ondersteuningsmaten	158
6.3.2	Betrouwbaarheidsmaten	159
6.3.3	Implicatie– of Conjunctiegebaseerde Vaagregels?	161
	Samenvatting	163
	Abstract	167
	Index	180

TOELATING TOT BRUIKLEEN

De auteur geeft de toelating dit proefschrift voor consultatie beschikbaar te stellen en delen ervan te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit dit werk.

De auteur

Voorwoord

Men heeft me er ooit voor gewaarschuwd dat het werken aan een doctoraatscriptie een solitaire bezigheid zou worden; de voorbije vier jaren hebben wat mij betreft echter precies het tegenovergestelde aangetoond. Ik wist me immers omringd, en gedragen, door een uitgebreid netwerk aan mensen die allen op de één of de andere manier hebben bijgedragen tot het voorliggende werk, en die ik om die reden hier speciaal wil vermelden.

In de eerste plaats wil ik Prof. Kerre mijn oprechte dank betuigen. Het mag gezegd dat ik aan hem mijn vorsende geest, en het onvermogen met minder genoegen te nemen dan het volledig uitspitten van een ter harte genomen idee, verschuldigd ben. Als hoofd van de onderzoeksgroep “Vaagheids- en Onzekerheidsmodellerings”, die ik steeds ervaren heb als de veilige maar bedrijvige thuishaven van waaruit ik mijn wetenschappelijke ambities kon verwezenlijken, heeft hij me, op kordate maar zachtaardige wijze doorheen de verschillende stadia van mijn onderzoek geleid: vanaf de eerste pasjes tijdens de licentiaatscriptie, doorheen de woelige periode van het zoeken naar een wetenschappelijke identiteit, tot en met het in de huidige vorm gieten van de bereikte resultaten.

Martine, collega, behulpzame lezeres van dit proefschrift, nooit verlegen om ongezouten je mening te zeggen: dank je voor alles! Glad wil ik o.m. bedanken voor zijn wiskundig doorzettingsvermogen, waardoor we samen enkele goed bewaarde geheimen van de L^* -vaagverzamelingenleer konden ontsluiten; Mike en Dietrich, alsook de andere leden van de onderzoeksgroep, voor hun bijdrage tot een aangename, ongedwongen werksfeer en hun immer bereidwillige hulp hierbinnen.

Verder wil ik alle leden van de Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica bedanken voor hun collegialiteit en ondersteuning, in het bijzonder: Wouter, o.a. omwille van zijn creatieve bijdrage tot het ontwerpen van mijn onderzoeks-posters; Ann en Paul, voor het uit handen nemen van tal van administratieve verplichtingen; Katja en Herbert voor de logistieke steun; Guido voor het in goede banen leiden van de administratieve kant van mijn doctoraatsopleiding.

Binnen de Universiteit Gent waardeer ik verder het vruchtbaar onderzoekswerk met Prof. Dick Botteldooren en Andy Verkeyn, en de inspirerende gesprekken met o.a. Prof. Dirk Batens, Prof. Bernard De Baets en Prof. Gert De Cooman.

Dr. Da Ruan ben ik zeer erkentelijk omwille van de gegeven wetenschappelijke impulsen, en ook voor nuttige suggesties omtrent de Chinese taal en

cultuur; Prof. Geert Wets, voor enkele verhelderende inzichten omtrent associatieregels; Peter De Kesel, voor de gedrevenheid waarmee hij samen met mij het vaagkortste pad te lijf is gaan.

Ook het Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) wil ik bedanken, omwille van het gestelde vertrouwen en de geboden financiële mogelijkheden.

Tijdens mijn doctoraatsmandaat kon ik gedurende een aantal studieverblijven ook uitgebreid proeven van de expertise en de gastvrijheid van diverse buitenlandse collega's: Prof. Guoqing Chen en zijn studenten, die me een onvergetelijke China-ervaring hebben bezorgd; het team van Prof. Janusz Kacprzyk (o.m. Eulalia, Ania, Edyta, Przemyslaw, Slawomir en Maciej) dat voor me klaar stond in Warschau, en tenslotte de energieke ploeg rond Prof. Krassimir Atanassov (o.m. Vassia, Mariana, Nikolai, Triffon en Radoslav).

Ook wil ik een woord van dank richten aan de vele buitenlandse collega's, die ik ontmoet heb op conferenties, of via elektronische weg, en die elk op hun eigen manier richting hebben gegeven aan mijn onderzoek: Ofer Arieli, Michał Baczynski, Dionis Boixader, Ulrich Bodenhofer, Humberto Bustince, Petr Cintula, Davide Ciucci, Fabio Cuzzolin, Didier Dubois, Antonin Dvořák, Lluís Godo, Petr Hajek, Robert John, Javier Montero, Daowu Pei, Henri Prade, Florentin Smarandache, Peng Yan, Maciej Wygralak, Ronald Yager, Lotfi Zadeh, en vele anderen.

Daarnaast acht ik het een voorrecht, mij steeds gesteund te hebben geweten in mijn wetenschappelijke betrachtingen door mijn ouders, die mij alle kansen en vrijheid hebben gegeven om er voluit voor te gaan. Ook bij mijn goede vrienden, die me steeds door dik en dun hebben gesteund, sta ik in het krijt. In het bijzonder wil ik Krista van ganser harte danken, voor al het vertrouwen, het enthousiasme, de steun en de liefde die ze me onvoorwaardelijk geeft.

Hoofdstuk 1

Inleiding

Dat Aristoteles op de duur een hinderpaal is geworden voor een verdere ontwikkeling der wetenschap, ligt niet in zijn speurende geest—tenzij misschien voor zover deze de trek vertoont het eenmaal gevondene voor altijd bewezen te houden—, maar in het gebrek aan denkkraft van zijn latere bewonderaars. (Bernard Delfgaauw en Frans Van Peperstraten, in: “Beknopte geschiedenis van de wijsbegeerte”)

Panta rhei: alles stroomt, is in beweging. Heraclitus’ (ca. 535 v. Chr.–ca. 475 v. Chr.) vaststelling dat de rivier die we vandaag doorwaden (of, in een actuelere context, het wereldwijde web dat we vandaag raadplegen), morgen niet meer dezelfde zal zijn, omdat er steeds weer ander water door vloeit, maakt het menselijk vermogen tot abstraheren, conceptvorming en redeneren, dat ons onder meer toelaat om afspraken te maken als: “Ontmoet me morgen opnieuw bij de rivier” (of, in de chatroom), des te opmerkelijker. In de natuurlijke taal vindt de mens een krachtig hulpmiddel bij het beheersen van zijn complexe leefwereld: vele woorden hebben immers betrekking op categorieën; “rivier” legt als klasse de nadruk op de essentie (een bedding waardoor water stroomt en die tussen twee oevers is gelegen) en vermindert de aandacht voor unieke details. Het giet kennis in een hanteerbare vorm, het veralgemeent en vereenvoudigt.

Plato (427 v. Chr.–347 v. Chr.) gaf aan dit “godengeschenk” een religieus getinte draai. Door de voortdurende verandering rondom ons toe te schrijven aan een door de zintuigen gecorrumpeerde waarneming, en erop te hameren dat wij als denkende wezens ook met één voet staan in een verhevener wereld waar permanente, eeuwige “Ideeën” de toon van een universeel geldende kennis zetten, trekt hij een wel erg scherpe scheidslijn tussen stof en rede. Aristoteles (384 v. Chr.–322 v. Chr.), meer man van de wereld, betrok het denken terug op de materiële wereld. Zijn bijzondere talent tot het ordenen en verklaren van het feitelijke culmineerde in de constructie van de eerste formele logica—de leer van redenering en het bewijs, waarin door algemene en specifieke, bevestigende

en ontkennende oordelen, afleidingen “volgens het gezond verstand” tot stand komen. Aristoteles’ logica berust op drie fundamentele pijlers¹:

1. Alles wat is, is (A is A : *identiteitsprincipe*)
2. Niets kan terzelfder tijd zijn en niet zijn (A en niet- A kunnen niet samen voorkomen: *wet van de contradictie*)
3. Alles is, of is niet (ofwel A , ofwel niet- A doet zich voor: *wet van het uitgesloten derde*)

Deze principes, die tot doel hebben onze redeneringen voor absurditeit te behoeden, zouden later prima gedijen in de axiomatische voedingsgrond die de negentiende-eeuwse logici en wiskundigen creëerden. De tweewaardige of Booleaanse logica, of equivalent hiermee, Cantors verzamelingenleer, gaf een nieuw elan aan de wiskundige methode, die wel voer bij de koortsachtige betrachting van het precieze. “Onheilsprofeten” lieten echter niet na kritische kanttekeningen te maken bij de praktijk om systematisch de imprecisie inherent aan het dagelijks leven onder de mat te schuiven; Charles Peirce bv. ventileerde zijn ongenoegen door uitspraken als [72], “*Logicians have been at fault in giving Vagueness the go-by, so far as not even to analyze it*” en “*Vagueness ... which is no more to be done away with in the world of logic than friction in mechanics*”.

Merkwaardig genoeg (of juist niet) dateert de vaststelling, dat een doorgedreven formalisering vaak niet bij machte is om niet-wiskundig taalgebruik te verhelderen, reeds uit de tijd van Aristoteles. Volgens de overlevering formuleerde Eubulides van Megara een reeks problemen in de trant van: “Vormt één graankorrel een hoop? Hoe is het gesteld met twee, drie, ... graankorrels?”, die de geschiedenis ingingen onder de naam *soritesparadoxen*². Dergelijke problemen stellen de mogelijkheid om een rigoureuze onderscheid te maken tussen bv. een hoeveelheid graankorrels die net wel of net niet een hoop uitmaakt, en bij uitbreiding ook Aristoteles’ wetten van de contradictie en het uitgesloten derde, in twijfel.

Klassieke logica, waarin uitspraken enkel de waarheidswaarde waar (1) of vals (0) kunnen aannemen, gaat dergelijke als “slecht gestelde evaluatieproblemen” bestempelde dilemma’s resoluut uit de weg door hun bestaan te verloochenen. Voor een redenering op haar geldigheid kan worden onderzocht, moet ze eerst volkomen ondubbelzinnig gemaakt zijn, waarna ze kan worden vertaald in een aan de logica gebonden kunsttaal. [96] Bijvoorbeeld, honderd graankorrels of meer vormen een hoop, punt uit. Intuïtief voelen we aan dat het trekken van zo’n scherpe, absolute grens weinig verhelderend is, om niet te zeggen: een aanfluiting van het gezond verstand dat diezelfde klassieke logica zo hoog in het vaandel draagt.

Het afstappen van het klassieke tweewaardige, zwart-wit denken voltrok zich stapsgewijs. De ban werd alvast gebroken door de Pool Jan Lukasiewicz die in 1920 de eerste aanzet gaf tot een concreet formeel model van vaagheid middels

¹Zie ook de website <http://esgs.free.fr/uk/ari.htm>

²Het Griekse woord “soros” (*σoros*) betekent “hoop”.

de introductie van een *driewaardige* logica, waarin een gegeven propositie nu ook de waarheidswaarde “mogelijk” ($\frac{1}{2}$) kon bezitten. [100] De nieuwe waarde dreef als een wig de waarden “waar” en “vals” uit elkaar. Met dit revolutionaire inzicht effende hij het pad voor logica’s die een eindig (n) of aftelbaar aantal waarheidswaarden in acht nemen.

De vanuit Iran naar de Verenigde Staten geëmigreerde ingenieur Lotfi Zadeh ging in 1964 nog een stapje verder door het bestaan van een *continuum* van waarheidswaarden tussen 0 en 1 te postuleren, of equivalent daarmee, een continuum van lidmaatschapsgraden in een verzameling: de vaagverzamelingsleer (*fuzzy set theory*) zette haar eerste pasjes³. Hij gaf gestalte aan zijn ideeën in een artikel [141] dat het jaar daarop zou verschijnen in “Information and Control”, en zou uitgroeien tot één van de meest geciteerde bronnen uit de hedendaagse wetenschappelijke literatuur. Zijn ideeën snoerden de soritesparadox de mond: het evaluatieprobleem of een gegeven collectie al dan niet een hoop vormt, wordt herleid tot zijn ware proporties, namelijk tot een vaststellen van de mate of gradatie waarin de eigenschap “hoop–zijn” is vervuld. Door het vage begrip “hoop” af te beelden op een wiskundig object, dat zelf allesbehalve vaag is, wordt het ook mogelijk om formeel te “rekenen” met woorden, en meer concreet om dergelijke berekeningen toe te vertrouwen aan computersystemen. De toepassingen zijn legio en omvatten o.m. het bevragen van grote gegevensvolumes a.d.h.v. talige of linguïstische zoekopdrachten (bv. “Geef de tijdschriften met een *hoge* impactfactor waarin de kandidaat *recent* heeft gepubliceerd”) en het opzetten van flexibele redeneringen a.d.h.v. imprecieze regels zoals “aandelen die *laag* geprijsd staan en een *gunstige* groeioprognose hebben zijn *erg aantrekkelijk* om aan te kopen”.

Eén van de punten van kritiek op Zadehs voorstel is de ietwat arbitraire toekenning van de lidmaatschapsgraden (hoewel deze toekenning vaak aan de hand van psycholinguïstische maatstaven wordt getoetst, zoals ook beschreven in o.m. [17, 28, 46], en de betekenis van de exacte getalwaarden eerder ondergeschikt is aan de *ordering* van objecten die eruit voortvloeit). Dat heeft ondernemingen in Japan, China en tal van andere landen uit voornamelijk het Verre Oosten er echter niet van weerhouden, het formalisme met open armen te ontvangen en in te zetten in zowat elk domein waaraan intelligente controle te pas komt: foto- en videocamera’s, rijstkokers, wasmachines, koelkasten, auto’s, controle van chemische en biologische processen, fabrieksautomatisering, ...; Japanse bedrijven alleen al hadden in 2000 op dit vlak meer dan 2000 patenten verworven. [101]

In het Westen, en dan vooral binnen de industriële reus die de Verenigde Staten toch zijn, is de trein veel trager op gang gekomen, en werd (wordt) al te vaak de rem op het enthousiasme gezet. In een recent artikel legt Shahab Mohaghegh [101] de vinger op de wonde:

“The term “fuzzy” carries a negative connotation in the western cul-

³Zadeh liet ook de deur op een kier voor meer algemene evaluatieschalen dan $[0,1]$. In [141] schreef hij: “In a more general setting, the range of the membership function can be taken to be any partially ordered set P .”

ture. The term “fuzzy logic” seems to both misdirect the attention and to celebrate mental fog. On the other hand, eastern culture embraces the concept of coexistence of contradictions as it appears in the Yin–Yang symbol. While Aristotelian logic preaches A or Not–A, Buddhism is all about A and Not–A.”

Om deze stelling te kunnen plaatsen keren we terug naar Heraclitus’ dynamisme. Deze filosoof zei ooit: “God is dag en nacht, winter en zomer, oorlog en vrede, honger en verzadiging”. Hiermee bedoelt hij dat we ons maar een oordeel kunnen vormen over iets als we het naast zijn tegenstelling plaatsen: hoe koud de winter wel is, ervaren we pas ten volle als we eerder de warmte van de zomerzon hebben gevoeld; hoe gruwelijk de oorlog, als we de herinnering aan vrede koesteren. De oosterse mystiek toont zich van oudsher erg receptief tegenover dat samengaan van tegengestelden, en verklaart de voortdurende beweging vanuit de werking van twee tegengestelde, elkaar balancerende oerkrachten: yin en yang. Yin staat daarbij o.m. voor zachte, koude, donkere en vrouwelijke facetten, terwijl in yang vooral het harde, warme, lichte en mannelijke naar voor komt. [94] De Chinese taal is zelfs dusdanig doordrongen van dit samenspel van complementaire krachten, dat het woorden die abstracte begrippen zoals lengte uitdrukken vormt door het naast elkaar plaatsen van tegengestelde termen:

<i>chang duan</i>	lang–kort	“lengte”
<i>da xiao</i>	groot–klein	“maat”
<i>hei bai</i>	zwart–wit	“waarheid”
<i>ruan ying</i>	zacht–hard	“gevoel”

Om deze reden staat de oosterse opinie dan ook veel minder weigerachtig tegenover uitspraken die deels waar en deels vals zijn, of tegenover fenomenen die zich terzelfder tijd wel en niet voordoen. Het yin–yang symbool belichaamt evenwel ook nog een ander fundament van de werkelijkheid dat als een rode draad doorheen dit proefschrift loopt: *tweezijdigheid*.

Het begrip tweezijdigheid huldigt de gedachte dat aan elk voorwerp, scenario, ambitie, . . . twee zijden, een positieve en een negatieve, zijn, die men allebei moet belichten om zich er een globaal beeld van te kunnen vormen. Mensen krijgen soms het verwijt te horen dat ze zich een eenzijdig oordeel over een bepaalde aangelegenheid vormen, dat ze de zaak niet “van beide kanten” hebben beschouwd; bepaalde beslissingen worden ook wel eens omschreven als een tweesnijdend zwaard, d.w.z. ze geven zowel aanleiding tot positieve als negatieve effecten, die we vooraf heel goed tegenover elkaar dienen af te wegen. Imprecisie en tweezijdigheid zijn als concepten onderling nauw verstrengeld. Men zou kunnen stellen dat in veel gevallen het optreden van imprecisie een tweezijdige oplossingsstrategie noodzaakt. Een mooi voorbeeld hiervan wordt geleverd door rechtzaken: op grond van het beschikbare bewijsmateriaal tracht de aanklager aan te tonen dat enkel scenario’s mogelijk zijn waarin de beklaagde inderdaad schuld heeft aan de misdaad waarvoor hij wordt vervolgd, terwijl de verdediging net het tegenovergestelde ambieert. Niet zelden spreken de pleidooien elkaar tegen, of kan omtrent bepaalde feiten geen uitsluitsel worden gegeven, en is het

aan de rechtsprekende partij om de plausibiliteit van de diverse argumenten pro en contra te valideren en/of te ontzenuwen.

De term “imprecisie” dekt hier een ruimere lading dan degene die we er in het kader van de soritesparadox aan hebben toegekend; naast de inherente *vaagheid* die aanwezig is in het al of niet voldoen van een object aan een bepaalde eigenschap, hebben we ons ook te hoeden voor *onbepaaldheden*, *twijfels*, *conflicterende overtuigingen*, . . . die een precieze karakterisatie van het object in kwestie bemoeilijken.

Merk op dat de klassieke vaagverzamelingenleer in die zin slecht uitgerust is om dit type problemen aan te pakken, doordat het de mate waarin een object *niet* behoort tot een vaagverzameling, automatisch afleidt uit de lidmaatschap van dat object tot de vaagverzameling⁴. Ruimte voor twijfel is er dus niet. Concreet toegepast op ons voorbeeld van een rechtzaak: we kunnen wel uitdrukken dat we de beklaagde in een bepaalde mate (α behorende tot $[0,1]$) schuldig achten, maar niet dat we eigenlijk geen uitsluitsel kunnen of willen doen omtrent die mate.

Om die reden passeren in dit proefschrift een aantal aanpakken de revue, die we gezamenlijk onder de noemer “tweezijdige modellen van imprecisie” catalogeren. We willen in die zin richting geven aan een naar onze mening onderbelicht⁵ maar wel veelbelovend aspect in de verwerking van imprecieze informatie. De behandelde modellen hebben met elkaar gemeen dat ze alle een uitbreiding vormen op de klassieke verzamelingenleer (resp. tweewaardige logica), en kunnen volgens grove scheidingslijnen als volgt worden ingedeeld:

1. Tweezijdigheid die voortspruit uit benadering; hiertoe behoren o.m. *intervalwaardige vaagverzamelingen*, die met elk object in plaats van een eenduidig bepaalde lidmaatschapsgraad, een interval van mogelijke lidmaatschapsgraden laten overeenstemmen, maar ook de zogenaamde *ruw- en wazigverzamelingen*, waarbij een onvolledig gekend concept (bv. de schuldigen aan een misdaad) wordt benaderd langs “onder” en “boven”, d.w.z. door instanties die hetzij zeker wel, hetzij zeker niet bij het concept horen te selecteren.
2. Tweezijdigheid die geformuleerd wordt als het toekennen van intensiteit of modaliteit aan twee polen, “positief” en “negatief”; als belangrijkste voorbeeld binnen dit proefschrift treden bitralies⁶ op, waarbij men a.d.h.v. van elkaar onafhankelijke waarheids- en valsheidswaarden zijn overtuigingen omtrent het al dan niet gelden van een bepaalde uitspraak kan uiten. Bijvoorbeeld, de mate waarin er bewijs en tegenbewijs voor de schuld van

⁴a.d.h.v. een vaaglogisch complement, zie Sectie 2.2.1.

⁵waarmee we niet willen insinueren dat deze modellen op zich niet vaak voorkomen in de literatuur, maar wel dat de gemeenschappelijke karakteristiek van tweezijdigheid die hen verbindt, of tot aantrekkelijke speciale gevallen van algemenere modellen maakt, er onvoldoende tot zijn recht is gekomen.

⁶en in zekere zin ook zogenaamde *intuitionistische vaagverzamelingen*, al zullen we aantonen dat door de beperkingen die zij zichzelf opleggen, deze modellen uiteindelijk toch belanden bij de eerste categorie.

de beklagde voorhanden is. Het belangrijkste verschil met de benaderende modellen is dat men hier een doeltreffend middel in handen krijgt voor het voorstellen van tegenstrijdigheden, die vaak even natuurlijk als onvermijdelijk (maar niet altijd even wenselijk) zijn als hiaten in informatie.

Dit proefschrift is in grote lijnen als volgt opgebouwd: Hoofdstuk 2 bereidt de lezer voor op wat komen gaat door enerzijds de nodige bagage omtrent ordestructuren aan te brengen, en anderzijds reeds een panoptische blik over de belangrijkste modellen heen te laten gaan. In Hoofdstuk 3 gaan we daarna behoorlijk diep de zee in: we leggen de syntactische en semantische structuur achter de tweezijdige extensies van de vaagverzamelingenleer bloot, en bestuderen, met het oog op later, belangrijke technische hulpmiddelen zoals inclusiematen en vaagrelationele beelden. Ook leggen we er Aristoteles' identiteitsprincipe het vuur aan de schenen, echter niet door verschil in gelijkheid te prediken, maar door (benaderende) gelijkheid tussen verschillende objecten toe te laten. Nieuwe horizonten komen in het vizier wanneer we in Hoofdstuk 4 onontgonnen mogelijkheden tot onderlinge hybridisering die ruw- en vaagverzamelingen bieden verkennen. Hoofdstuk 5 plaatst de voorstelling van feitenmateriaal naast die van generieke kennis (onder de vorm van ALS-DAN regels), en voorziet in een gedegen en efficiënt raamwerk voor benaderend redeneren, waarin, door o.m. het onderscheid tussen positieve en negatieve vaagregels te maken, ons tweezijdig uitgangspunt opnieuw de toon bepaalt. Een afrondend hoofdstuk exploreert de mogelijkheden tot de automatische generatie van regels uit grote datavolumes.

Vermelden we tot slot dat bepaalde van de in dit proefschrift uiteengezette onderzoeksresultaten reeds het onderwerp uitmaakten van artikels gepubliceerd in internationale tijdschriften [17, 30, 34, 35, 40, 107], in de proceedings van internationale conferenties en/of studentensessies tijdens zomerscholen [27, 28, 29, 31, 32, 33, 38, 48, 52], en als hoofdstukken van boeken [36, 37, 39], of momenteel als dusdanig ter perse [53] zijn.

Hoofdstuk 2

Een Verkennde Studie

Croyez ceux qui cherchent la vérité,
doutez de ceux qui la trouvent.
(André Gide)

In dit hoofdstuk leggen we eerst de ordetheoretische en logische fundamenteen waarop dit proefschrift in grote mate steunt: gaandeweg verfijnen en verrijken we het primitieve begrip van een *partieel geordende verzameling* (bv. van waarheidswaarden, lidmaatschapsgraden of (vaag)verzamelingen) tot het overeenstemming vindt met de diverse geplogendheden van een door imprecisie op de proef gesteld logisch redeneren, en in het bijzonder heeft afgerekend met het defaitisme van de klassieke of Booleaanse logica. Uit de namen die men hecht aan de rijk-verscheiden algebraïsche calculi en logische operaties die we in herinnering brengen (o.m. die van Brouwer, Gödel, Kleene, Łukasiewicz en Reichenbach), moge blijken dat deze structuren schatplichtig zijn aan een generatie van innoverende logici uit de eerste helft van de twintigste eeuw.

In een tweede luik leggen we reeds een blitzbezoek af aan enkele verzamelingtheoretische concepten die verderop een groot deel van de koek onder zich verdelen, te weten:

- L -vaagverzamelingen (met als bijzondere gevallen: (klassieke) vaagverzamelingen, intervalwaardige vaagverzamelingen en intuïtionistische vaagverzamelingen)
- wazigverzamelingen
- ruwverzamelingen
- tweevoudige (vaag)verzamelingen.

Om laatstgenoemde objecten te kaderen, halen we ook de nodige begrippen aan uit de *possibiliteitsleer*.

2.1 Logische en Ordetheoretische Structuren

(Algebraïsche) ordestructuren lenen zich bijzonder goed tot de studie en ontwikkeling van logische calculi. Is deze uitspraak reeds van toepassing op de klassieke tweewaardige logica (denken we i.h.b. aan de welbekende Boole-algebra's), dan geldt zij met des te meer aandrang voor de meerwaardige en vaaglogica's die de afgelopen eeuw de revue zijn gepasseerd; immers, in een "partieel geordende verzameling van waarheidswaarden" schuilen reeds enkele van de uitgangspunten die we in het vaandel dragen: nl., dat logische waarheid een gradueel iets is dat zich tussen welbepaalde uitersten kan bewegen, en dat onvergelijkbaarheid tussen waarheidswaarden kan optreden.

2.1.1 Posets, Tralies en Boole-algebra's

2.1 Definitie (Partieel geordende verzameling). [12] Zij L een niet-ledige verzameling en $\leq_L$ een binaire relatie over L . $(L, \leq_L)$ wordt een partieel geordende verzameling, kortweg poset, genoemd indien $\leq_L$ een orderrelatie is, i.e. indien ze voldoet aan

- (P.1) $(\forall x \in L)(x \leq_L x)$ (reflexiviteit)
- (P.2) $(\forall x, y \in L)(x \leq_L y \text{ en } y \leq_L x \Rightarrow x = y)$ (antisymmetrie)
- (P.3) $(\forall x, y, z \in L)(x \leq_L y \text{ en } y \leq_L z \Rightarrow x \leq_L z)$ (transitiviteit)

Men noemt elementen x en y in L *vergelijkbaar* indien $x \leq_L y$ of $y \leq_L x$ geldig is. Indien elke twee elementen in L vergelijkbaar zijn, noemt men $\leq_L$ *totaal*. Met elke orderrelatie $\leq_L$ associeert men ook een *strict-orderrelatie* $<_L$: voor x, y in L schrijft men $x <_L y$ indien $x \leq_L y$ en $x \neq y$. Voorts schrijven we ook $x \geq_L y$ indien $y \leq_L x$ ($x >_L y$ indien $y <_L x$).

Aan de hand van $\leq_L$ kan men de noties *ondergrens* en *bovengrens* invoeren: een element a in L wordt een bovengrens genoemd van A ($A \subseteq L$) als

$$(\forall b \in A)(b \leq_L a)$$

a heet *supremum* (ook: kleinste bovengrens) van A als a een bovengrens is van A en bovendien

$$(\forall b \in L)(b \text{ is een bovengrens van } A \Rightarrow a \leq_L b)$$

Men leidt gemakkelijk af dat het supremum van een deelverzameling A van L uniek is als het bestaat. We noteren het $\sup A$. Analooft definieert men: een element a in L is een ondergrens van A ($A \subseteq L$) als

$$(\forall b \in A)(a \leq_L b)$$

a heet *infimum* (ook: grootste ondergrens) van A als a een ondergrens is van A en bovendien

$$(\forall b \in L)(b \text{ is een ondergrens van } A \Rightarrow b \leq_L a)$$

Opnieuw volgt uit het bestaan van een infimum van A de uniciteit ervan; we noteren dit $\inf A$.

2.2 Definitie (Tralie). [12] Een poset $(L, \leq_L)$ wordt tralie genoemd indien voor elke twee elementen a, b in L , $\sup\{a, b\}$ and $\inf\{a, b\}$ bestaan.

$\inf\{a, b\}$ en $\sup\{a, b\}$ worden dikwijls verkort weergegeven als $a \wedge b$ en $a \vee b$, respectievelijk. Men gaat eenvoudig na dat $a \wedge b = a \iff a \vee b = b \iff a \leq_L b$. Om die reden vervangt men soms de notatie $(L, \leq_L)$ door de equivalente *algebraïsche structuur*¹ $(L, \wedge, \vee)$. In dit werk gebruiken we beide notaties door elkaar.

Een tralie $(L, \leq_L)$ heet:

- *compleet* als voor elke niet-ledige deelverzameling A van L , $\sup A$ en $\inf A$ bestaan.
- *distributief* als voor elke x, y en z in L geldt: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
- *begrensd* als er een *kleinste element* 0 en een *grootste element* 1 in L bestaan zo dat voor alle x in L , $0 \leq_L x \leq_L 1$.
- *gecomplementeerd* als $(L, \leq_L)$ begrensd is en voor elke x in L er een element x' in L bestaat zo dat $x \vee x' = 1$ en $x \wedge x' = 0$.
- *Boole-algebra* indien $(L, \leq_L)$ gecomplementeerd en distributief is.

Genoegzaam bekend is de Boole-algebra uit de tweewaardige propositielogica: er wordt gewerkt met formules of *proposities* die men $P, Q, \dots$ noteert, waarvan men aanneemt dat ze enkel vals (0) of waar (1) kunnen zijn, en die onderling kunnen worden samengesteld met *logische connectieven*. Men schrijft bv. $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ en $P \rightarrow Q$ en spreekt respectievelijk van de *negatie* van P , en van de *conjunctie*, *disjunctie* en *implicatie* van P en Q . Gegeven de waarheidswaarden van twee proposities P en Q (die we voor de eenvoud identificeren met de proposities zelf) wordt de waarheidswaarde van hun diverse samenstellingen berekend a.d.h.v. volgende waarheidstabellen:

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \rightarrow Q$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1

Men gaat gemakkelijk na dat $(\{0, 1\}, \wedge, \vee)$ een Boole-algebra vormt met grootste element 1 en kleinste element 0, dat het uniek complement van een element x in $\{0, 1\}$ gegeven wordt door $\neg x$ en dat $x \rightarrow y$ als een verkorte schrijfwijze voor $\neg x \vee y$ op te vatten is.

Ook de structuur $\mathcal{P}(U)$ der deelverzamelingen van een niet-ledige verzameling U vormt een Boole-algebra. Men gaat na dat $(\mathcal{P}(U), \cap, \cup)$, met $\cap$ en $\cup$ de

¹i.e. een verzameling voorzien van een aantal n -aire bewerkingen.

klassieke verzamelingtheoretische bewerkingen doorsnede en unie, een Boole-algebra is met U als grootste en $\emptyset$ als kleinste element. De corresponderende orderrelatie is de klassieke verzamelingtheoretische inclusie $\subseteq$. Het complement van een verzameling A in $\mathcal{P}(U)$ wordt gegeven door het verzamelingtheoretisch verschil $U \setminus A$. We noteren het coA .

2.3 Opmerking. Boole-algebra's kunnen ook los van het kader van posets geformaliseerd worden door middel van *Huntingtons axiomastelsel*: een Boole-algebra wordt gegeven als een vijftal $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ bestaande uit een niet-lege verzameling B , twee binaire bewerkingen $\wedge$ en $\vee$ op B , een unaire bewerking $'$ op B en twee elementen 0 en 1 van B waarvoor voldaan is aan, voor a, b, c in B ,

$$\begin{array}{ll} (B.1) & a \wedge b = b \wedge a \\ (B.2) & a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ (B.3) & a \wedge 1 = a \\ (B.4) & a \wedge a' = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (B.1') & a \vee b = b \vee a \\ (B.2') & a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ (B.3') & a \vee 0 = a \\ (B.4') & a \vee a' = 1 \end{array}$$

2.1.2 Veralgemeende Logische Connectieven op Tralies

Gedurende meer dan twee millennia heeft de tweewaardige Boole-algebra uit de vorige sectie het westerse logisch denken bepaald. Slechts vrij recent kwam een beweging op gang waarbij werd overgestapt van het idee om slechts twee waarheidswaarden in acht te nemen, op veralgemeende evaluatiestructuren (i.h.b. begrensde tralies) met een al dan niet eindig aantal elementen. Een kritieke vraag die daarbij telkens weer opduikt is de volgende: hoe dienen logische connectieven in dergelijk veralgemeend kader te worden gedefinieerd? Het mooiste bewijs dat een eenduidig antwoord op die vraag niet bestaat wordt gegeven door vaaglogica; men erkent er immers uitdrukkelijk dat de keuze van operaties waarmee men het eenheidsinterval $[0,1]$ uitrust, ten volle berust bij de concrete applicatie of de gewenste eigenschappen die men in gedachten heeft, en men stelt integendeel ruime *klassen* van logische connectieven zoals negatoren, t-normen, t-conormen en implicatoren voorop waaruit kan gekozen worden. Daar bovendien definitiegewijs deze klassen slechts algemeen refereren aan het begrip “ordening” op het eenheidsinterval, staat er niets in de weg de aanpak open te trekken naar een veel ruimer kader (zie bv. [42, 46, 49]). We hernemen hier de belangrijkste resultaten; voor de eenvoud veronderstellen we dat we werken met een complete, en dus a fortiori begrensde tralie $(L, \leq_L)$ met 0 als kleinste en 1 als grootste element.

Negatoren

2.4 Definitie (Negator). Een negator op L is een dalende $L \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{N}$ die voldoet aan $\mathcal{N}(0) = 1$ en $\mathcal{N}(1) = 0$.

$\mathcal{N}$ heet *involutief* indien $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$ voor elke x in L . Men gaat verder na dat, als $(L, \leq_L)$ distributief is, voor een involutieve negator $\mathcal{N}$ op L de *wetten*

van de Morgan gelden [23]: $\mathcal{N}(x \wedge y) = \mathcal{N}(x) \vee \mathcal{N}(y)$ en $\mathcal{N}(x \vee y) = \mathcal{N}(x) \wedge \mathcal{N}(y)$, voor elke x, y in L .

2.5 Voorbeeld. Op de distributieve tralie $([0, 1], \leq)$ is de afbeelding N_s bepaald door, voor x in $[0, 1]$, $N_s(x) = 1 - x$, een involutieve negator die *standaardnegator* genoemd wordt.

Men zegt dat $\mathcal{N}$ voldoet aan de *wet van de contradictie* indien $x \wedge \mathcal{N}(x) = 0$ voor elke x in L , en aan de *wet van het uitgesloten derde* indien $x \vee \mathcal{N}(x) = 1$. Voor involutieve negatoren $\mathcal{N}$ zijn beide eigenschappen equivalent; als voorbeeld kunnen we de complementeringsoperatie (zoals $\neg$ en *co* uit sectie 2.1.1) in een willekeurige Boole-algebra aanhalen.

Naar de praktijk toe zijn de wetten van de contradictie en het uitgesloten derde niet altijd haalbaar of wenselijk. Typisch zal men in situaties waar vage eigenschappen opduiken niet de wenkbrauwen fronsen wanneer men bijvoorbeeld zegt dat iemand “dik en toch niet dik is”. Een Kleene negator tracht het midden te houden tussen deze intuïtie en de klassieke² spelregels; ruw gezegd mogen contradicties “niet te groot” en tautologieën “niet te klein” worden.

2.6 Definitie (Kleene negator). [23] Een involutieve negator $\mathcal{N}$ op L die voldoet aan $x \wedge \mathcal{N}(x) \leq_L y \vee \mathcal{N}(y)$ voor elke x, y in L heet een Kleene negator.

2.7 Voorbeeld. De standaardnegator N_s op $[0, 1]$ is een Kleene negator, daar $\min(x, 1 - x) \leq \max(y, 1 - y)$ voor elke keuze van x en y in $[0, 1]$.

2.8 Definitie (Kleene tralie). [23] Zij $\mathcal{N}$ een Kleene negator op L , en zij bovendien $(L, \leq_L)$ distributief. Dan noemt men $(L, \leq_L, \mathcal{N})$ een Kleene tralie.

Een andere verfijning van het begrip negator komt tegemoet aan de wensen van de *intuitionistische logica*, waarin men verzaakt aan de wet van het uitgesloten derde doch niettemin geen contradicties toelaat (zie bv. [79]).

2.9 Definitie (Brouwer negator). [23] Een negator $\mathcal{N}$ op L die voldoet aan de wet van de contradictie en waarvoor geldt dat $x \leq_L \mathcal{N}(\mathcal{N}(x))$ voor x in L heet een Brouwer negator.

2.10 Voorbeeld. De zogenaamde Gödel negator N_g op $[0, 1]$, gedefinieerd door, voor x in $[0, 1]$,

$$N_g(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 0 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

is een Brouwer negator.

2.11 Definitie (Brouwer tralie). [23] Zij $\mathcal{N}$ een Brouwer negator op L , en zij bovendien $(L, \leq_L)$ distributief. Dan noemt men $(L, \leq_L, \mathcal{N})$ een Brouwer tralie.

²Aristoteles formuleerde reeds omstreeks 350 voor Christus de wetten van de contradictie en het uitgesloten derde, zie ook Hoofdstuk 1.

Men gaat na dat zowel Kleene tralies als Brouwer tralies het begrip Boole-algebra veralgemenen. Beide kunnen ook worden verenigd in een gemeenschappelijke structuur.

2.12 Definitie (Brouwer–Kleene tralie). [23] Zij $\mathcal{N}_b$ en $\mathcal{N}_k$ een Brouwer en een Kleene negator op L , respectievelijk, en zij bovendien $(L, \leq_L)$ distributief. Dan noemt men $(L, \leq_L, \mathcal{N}_b, \mathcal{N}_k)$ een Brouwer–Kleene tralie indien voldaan is aan de volgende verbindingsregel, voor x in L :

$$\mathcal{N}_k(\mathcal{N}_b(x)) = \mathcal{N}_b(\mathcal{N}_k(x))$$

2.13 Voorbeeld. $([0, 1], \leq, N_g, N_s)$ is een Brouwer–Kleene tralie.

Triangulaire normen en conormen

De meest voor de hand liggende keuze voor het modelleren van de connectieven “conjunctie” en “disjunctie” over L bestaat erin, zoals in een Boole-algebra, gebruik te maken van de infimum- en supremumbewerkingen over L . In de praktijk is deze keuze echter niet steeds aanvaardbaar wegens het *niet-compenserend gedrag* van deze bewerkingen: er geldt immers, wanneer twee elementen x en y in L vergelijkbaar zijn, dat bv. noodzakelijk $x \wedge y = x$ of $x \wedge y = y$. In de tralie $([0, 1], \min, \max)$ heeft dit bv. tot gevolg dat $\min(0.1, 0.1) = \min(0.1, 1) = 0.1$, m.a.w. de infimumbewerking is ongevoelig voor schommelingen in het tweede argument. Een opener aanpak vond men in de gedaante van Schweizer en Sklars [114] notie van *triangulaire normen* en *triangulaire conormen*, oorspronkelijk over $[0, 1]$ gedefinieerd maar hier veralgemeend tot L naar het voorbeeld van o.m. [42, 46, 49].

2.14 Definitie (Triangulaire norm). Een triangulaire norm, of kortweg t-norm, op L is een stijgende, associatieve en commutatieve $L^2 \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{T}$ die voldoet aan $\mathcal{T}(1, x) = x$ voor elke x in L .

2.15 Definitie (Triangulaire conorm). Een triangulaire conorm, of kortweg t-conorm, op L is een stijgende, associatieve en commutatieve $L^2 \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{S}$ die voldoet aan $\mathcal{S}(0, x) = x$ voor elke x in L .

t-normen en t-conormen breiden de klassieke logische conjunctie en disjunctie uit, i.e. hun restrictie tot de deelposet $(\{0, 1\}, \leq_L)$ van $(L, \leq_L)$ valt samen met hun booleaanse tegenhangers. Net zoals bij negatoren verfijnt men de definities door het opleggen van bijkomende eigenschappen.

2.16 Definitie (Archimedische t-norm, t-conorm). [68] Een t-norm $\mathcal{T}$ op L heet archimedisches indien voor alle x in $L \setminus \{0, 1\}$ geldt: $\mathcal{T}(x, x) <_L x$. Een t-conorm $\mathcal{S}$ op L heet archimedisches indien voor alle x in $L \setminus \{0, 1\}$ geldt: $\mathcal{S}(x, x) >_L x$.

2.17 Definitie (Nilpotente t-norm, t-conorm). [68] Een t-norm $\mathcal{T}$ op L heet nilpotent indien er x, y in $L \setminus \{0, 1\}$ bestaan waarvoor $\mathcal{T}(x, y) = 0$. Dergelijke x en y worden *nuldelers* van $\mathcal{T}$ genoemd. Een t-conorm $\mathcal{S}$ op L heet nilpotent indien er x, y in $L \setminus \{0, 1\}$ bestaan waarvoor $\mathcal{S}(x, y) = 1$.

t-norm		t-conorm	
$T_M(x, y)$	$= \min(x, y)$	$S_M(x, y)$	$= \max(x, y)$
$T_P(x, y)$	$= xy$	$S_P(x, y)$	$= x + y - xy$
$T_W(x, y)$	$= \max(x + y - 1, 0)$	$S_W(x, y)$	$= \min(x + y, 1)$

Tabel 2.1: Enkele belangrijke t-normen en t-conormen op $[0, 1]$ (x, y in $[0, 1]$) .

2.18 Definitie (Stricte t-norm, t-conorm). [68] Een t-norm $\mathcal{T}$ op L heet strict indien de partiële afbeeldingen $\mathcal{T}(x, \cdot)$ met x in $L \setminus \{0\}$ strict stijgend zijn. Een t-conorm $\mathcal{S}$ op L heet strict indien de partiële afbeeldingen $\mathcal{S}(x, \cdot)$ met x in $L \setminus \{1\}$ strict stijgend zijn.

2.19 Voorbeeld. Tabel 2.1 toont een zestal wijd verbreide t-normen en t-conormen over het eenheidsinterval. $\mathcal{T}_P$ (product) en $\mathcal{S}_P$ (probabilistische som) zijn archimedisch en strict, terwijl $\mathcal{T}_W$ en $\mathcal{S}_W$ (Lukasiewicz t-norm en t-conorm) archimedisch en nilpotent zijn. Alle zes zijn het bovendien continue afbeeldingen. Meer algemeen staan in de vaaglogica volgende *representatiestellingen* bekend (zie o.m. [68]):

- een t-norm T op $[0, 1]$ is continu, nilpotent en archimedisch als en slechts als er een continue stijgende permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat $T(x, y) = \varphi^{-1}(T_W(\varphi(x), \varphi(y)))$ voor x, y in $[0, 1]$. Men noemt T de φ -getransformeerde van T_W .
- een t-norm T op $[0, 1]$ is continu en strict als en slechts als er een continue stijgende permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor x, y in $[0, 1]$, $T(x, y) = \varphi^{-1}(T_P(\varphi(x), \varphi(y)))$. Men noemt T de φ -getransformeerde van T_P .
- een t-conorm S op $[0, 1]$ is continu, nilpotent en archimedisch als en slechts als er een continue stijgende permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat $S(x, y) = \varphi^{-1}(S_W(\varphi(x), \varphi(y)))$ voor x, y in $[0, 1]$. Men noemt S de φ -getransformeerde van S_W .
- een t-conorm S op $[0, 1]$ is continu en strict als en slechts als er een continue stijgende permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor x, y in $[0, 1]$, $S(x, y) = \varphi^{-1}(S_P(\varphi(x), \varphi(y)))$. Men noemt S de φ -getransformeerde van S_P .

Zoals Tabel 2.1 laat vermoeden, treden t-normen $\mathcal{T}$ en t-conormen $\mathcal{S}$ vaak op in paren. Meer algemeen betreft men hierbij ook een involutieve negator $\mathcal{N}$ en spreekt men over een zgn. *de Morgan triplet* $(\mathcal{T}, \mathcal{S}, \mathcal{N})$ indien geldt, voor x, y in L , dat $\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)))$. Men zegt dan ook dat $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ *elkaars dualen* zijn t.o.v. $\mathcal{N}$. In het geval van Tabel 2.1 vormt elk rijtje een duaal paar t.o.v. N_s .

S-implicator	R-implicator
$I_{S_M}(x, y) = \max(1 - x, y)$	$I_{T_M}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ y, & \text{anders} \end{cases}$
$I_{S_P}(x, y) = 1 - x + xy$	$I_{T_P}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{als } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{anders} \end{cases}$
$I_{S_W}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$	$I_{T_W}(x, y) = \min(1 - x + y, 1)$ $= I_{S_W}(x, y)$

Tabel 2.2: Enkele belangrijke implicatoren op $[0,1]$ (x, y in $[0, 1]$).

Implicatoren

2.20 Definitie (Implicator). Een implicator op L is een $L^2 \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{I}$ met dalende eerste en stijgende tweede partiële afbeeldingen die voldoet aan $\mathcal{I}(0, 0) = \mathcal{I}(0, 1) = \mathcal{I}(1, 1) = 1$ en $\mathcal{I}(1, 0) = 0$.

Hoewel in de literatuur stricter versies voorhanden zijn (zie bv. [46]), hebben we onze definitie bewust sober gehouden. Een implicator dient enerzijds de klassieke Boole-implicatie uit te breiden, terwijl anderzijds de (gemengde) monotoniteit de idee weerspiegelt dat een logische implicatie een maatstaf is voor de mate waarin haar tweede component (het *consequent*) meer waar is dan haar eerste component (het *antecedent*). Als dus bv. het antecedent daalt (minder waar wordt), mag de waarheidswaarde van de implicatie niet afnemen.

Implicatoren worden vaak ingedeeld op basis van hun constructie in termen van “primitieve” connectieven (i.h.b. negatoren en t-(co)normen). Zo gaat men na dat volgende constructies beide verfijningen zijn van het begrip “implicator”.

2.21 Definitie (S-implicator). Zij $\mathcal{S}$ een t-conorm op L en $\mathcal{N}$ een negator op L . Onder de S-implicator geïnduceerd door $\mathcal{S}$ en $\mathcal{N}$ verstaat men de $L^2 \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}$ bepaald door, voor x, y in L , $\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(x), y)$.

2.22 Definitie (R-implicator). Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op L . Onder de R-implicator (ook: residuele implicator) geïnduceerd door $\mathcal{T}$ verstaat men de $L^2 \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ bepaald door, voor x, y in L , $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y) = \sup\{\gamma \mid \gamma \in L \text{ en } \mathcal{T}(x, \gamma) \leq_L y\}$.

2.23 Voorbeeld. Tabel 2.2 laat enkele gekende implicatoren op het eenheidsinterval zien. Aangezien voor de S-implicatoren de inducerende negator telkens N_s is, wordt deze weggelaten in de notatie. I_{S_M} , I_{S_P} en I_{S_W} worden doorgaans *Kleene-Dienes*, *Reichenbach* en *Lukasiewicz* implicator op $[0,1]$ respectievelijk genoemd, terwijl I_{T_M} en I_{T_P} onder de naam *Gödel*, resp. *Goguen* implicator op $[0,1]$ bekend staan. [91] De Lukasiewicz implicator neemt in dit rijtje een bijzondere rol in daar het zowel een S- als een R-implicator is. Laat het ook duidelijk wezen dat niet alle implicatoren op $[0,1]$ in de zin van Definitie 2.20 een voorstelling als S- of R-implicator hebben (zie bv. [91]).

Voor verder gebruik introduceren we hier het concept *geïnduceerde negator* van een implicator op L .

(A.1)	$(\forall y \in L)(\mathcal{I}(\cdot, y) \text{ is dalend})$ $(\forall x \in L)(\mathcal{I}(x, \cdot) \text{ is stijgend})$ (<i>monotoniteit</i>)
(A.2)	$(\forall x \in L)(\mathcal{I}(1, x) = x)$ (<i>neutraliteit</i>)
(A.3)	$(\forall x, y \in L)(\mathcal{I}(x, y) = \mathcal{I}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(y), \mathcal{N}_{\mathcal{I}}(x)))$ (<i>contrapositiviteit</i>)
(A.4)	$(\forall x, y, z \in L)(\mathcal{I}(x, \mathcal{I}(y, z)) = \mathcal{I}(y, \mathcal{I}(x, z)))$ (<i>uitwisselbaarheid</i>)
(A.5)	$(\forall x, y \in L)(x \leq_L y \iff \mathcal{I}(x, y) = 1)$ (<i>begrenzingseigenschap</i>)
(A.6)	$\mathcal{I}$ is een continue $L^2 \rightarrow L$ afbeelding (<i>continuïteit</i>)

Tabel 2.3: Veralgemeende axioma's van Smets en Magrez.

2.24 Definitie (Geïnduceerde negator). Zij $\mathcal{I}$ een implicator op L . De $L \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ bepaald door, voor x in L , $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}(x) = \mathcal{I}(x, 0)$ is een negator op L die men de geïnduceerde negator van $\mathcal{I}$ noemt.

Implicatoren onderscheiden zich ook van elkaar door de logische eigenschappen die ze vervullen. Men vertrekt van een aantal criteria, typisch geïnspireerd op eigenschappen van de Boole-implicatie, en gaat vervolgens na welke afbeeldingen eraan voldoen. Een bekende aanpak binnen de vaaglogica is het *Smets–Magrez axiomasysteem* [117], waarvan we de uitbreiding tot L in Tabel 2.3 beschouwen³. In tegenstelling tot eerdere geziene concepten laat deze lijst zich echter niet naadloos veralgemenen: de continuïteitsvoorwaarde (A.6) behelst immers dat L met een afstandsfunctie d als metrische ruimte kan worden uitgerust, wat in het algemeen los staat van het ordebegrip in tralies.

2.25 Opmerking. Een $L^2 \rightarrow L$ afbeelding die voldoet aan (A.1) en (A.2) noemen we een *randimplicator*. Indien (A.1) t.e.m. (A.4) zijn voldaan spreekt men van een *modelimplicator*.

2.26 Voorbeeld. Voor implicatoren op $[0,1]$ gelden de volgende uitspraken m.b.t. de Smets–Magrez axioma's (zie o.m. [42, 43, 117])

- Voor een t-norm T op $[0,1]$ is de R-implicator I_T steeds een randimplicator.
- Voor een t-conorm S en een involutieve negator N op $[0,1]$ is de S-implicator $I_{S,N}$ steeds een modelimplicator. Omgekeerd bestaan voor elke modelimplicator I op $[0,1]$ een t-conorm S en een involutieve negator N zo dat $I = I_{S,N}$.
- Een implicator I op $[0,1]$ voldoet aan (A.1) t.e.m. (A.6) a.s.a. er een continue stijgende permutatie φ van $[0,1]$ bestaat zo dat, voor x, y in $[0,1]$, $I(x, y) = \varphi^{-1}(I_{S_W}(\varphi(x), \varphi(y)))$; men noemt I de φ -getransformeerde van de Lukasiewicz implicator I_{S_W} . De corresponderende klasse van implicatoren noemen we ook *veralgemeende Lukasiewicz implicatoren op $[0,1]$* .

³Merk op dat de voorwaarde (A.1) in feite reeds is opgenomen in Definitie 2.20 van een implicator. We nemen haar als dusdanig enkel op voor de eenvormigheid.

- Een implicator I op $[0,1]$ voldoet aan (A.1) t.e.m. (A.6) a.s.a. I een R-implicator op $[0,1]$ is geïnduceerd door een continue, nilpotente, archimedische t-norm T op $[0,1]$.

2.1.3 Geresidueerde Tralies en MV-algebra's

De studie van veralgemeende logische connectieven beschreven in de vorige paragraaf was eerder algebraïsch getint. Zo maken de corresponderende hulpstellingen bv. extensief gebruik van begrippen uit de analyse, en zijn we met de invoering van een metrisch begrip als continuïteit voor logische connectieven eerder tegemoet gekomen aan de wensen van ingenieurs (o.m. stabiliteit: een kleine wijziging in de invoer van een systeem mag geen abrupte wijzigingen in de uitvoer ervan teweegbrengen) dan van logici. Niettemin schetst zo'n algebraïsche studie een goed beeld van de onderlinge verhoudingen en is ze bovendien onmisbaar als vruchtbaar constructiemechanisme. In wat volgt bestendigen we de link met de formele logica door de eerdere resultaten te integreren binnen het abstracte kader van logische calculi.

De link tussen implicatoren en t-normen, gesuggereerd door de definitie van R-implicatoren, komt ook naar voor in de studie van *geresidueerde tralies* en *MV-algebra's*. Om economische redenen beschouwen we deze concepten hier niet in hun meest algemene gedaante (zie hiervoor o.m. [108, 128]), maar passen ze in binnen de reeds uiteengezette terminologie.

2.27 Definitie (Geresidueerde tralie). Zij $(L, \leq_L)$ een begrensde tralie⁴ met 0 en 1 als kleinste en grootste element, $\mathcal{T}$ een t-norm op L . Dan noemen we $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ een geresidueerde tralie indien $\mathcal{T}$ voor elke x, y en z in L voldoet aan de zogenaamde *residueringsvoorwaarde*:

$$\mathcal{T}(x, y) \leq_L z \iff x \leq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z) \quad (2.1)$$

2.28 Voorbeeld. $([0, 1], \leq, T)$ is een geresidueerde tralie als en slechts als T links-continu⁵ is. [69] In het bijzonder komen alle t-normen op $[0, 1]$ uit Tabel 2.1 als kandidaat in aanmerking.

Volgende stelling vat enkele belangrijke eigenschappen van geresidueerde tralies samen.

2.29 Stelling. In een geresidueerde tralie $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ geldt, voor x, y, z in L ,

1. $\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) \leq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), z)$
2. $\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), z) \leq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{T}(y, z))$

⁴In het meest algemene geval hoeft $(L, \leq_L)$ geen complete tralie te zijn. [128] De suprema die optreden in de definitie van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ moeten natuurlijk wel bestaan.

⁵Met een links-continue (rechts-continue) t-norm op een tralie $(L, \leq_L)$ bedoelen we een t-norm met links-continue (rechts-continue) partiële afbeeldingen.

3. $\mathcal{T}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)) \leq_L y$
4. $\mathcal{I}_T(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), y) \geq_L x$
5. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}(x, y), z)$
6. $\mathcal{T}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), \mathcal{I}_T(y, z)) \leq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z)$
7. $\mathcal{I}_T(\mathcal{T}(x, z), \mathcal{T}(y, z)) \geq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)$
8. $\mathcal{I}_T(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, z), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, z)) \geq_L \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, x)$

Bewijs. De eerste vijf eigenschappen werden aangetoond in o.m. [46, 108]. Van de drie laatste werd het bewijs in [14] voor het bijzondere geval $([0, 1], \leq, T)$, met T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, geleverd. De uitbreiding tot een willekeurige geresidueerde tralie brengt echter geen moeilijkheden met zich mee; als voorbeeld bewijzen we eigenschap 7. Zij daartoe x, y, z in L :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T(\mathcal{T}(x, z), \mathcal{T}(y, z)) &= \mathcal{I}_T(x, \mathcal{I}_T(z, \mathcal{T}(y, z))) \\ &\geq_L \mathcal{I}_T(x, y) \end{aligned}$$

We hebben daarbij in de eerste overgang gebruik gemaakt van eigenschap 5. De tweede overgang volgt uit de residueringsvoorwaarde (2.1), gelet op

$$\mathcal{T}(y, z) \leq_L \mathcal{T}(y, z) \iff y \leq_L \mathcal{I}_T(z, \mathcal{T}(y, z))$$

□

2.30 Definitie (MV-algebra). Zij $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ een geresidueerde tralie waarvoor bovendien is voldaan aan, voor x, y in L :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(x)) &= x && \text{(involutiviteit)} \\ x \leq_L y &\Rightarrow (\exists z \in L)(\mathcal{T}(y, z) = x) && \text{(deelbaarheid)} \end{aligned}$$

Dan noemen we $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ een MV-algebra.

2.31 Stelling. In een MV-algebra $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ geldt steeds, voor x, y in L ,

1. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(y), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(x)) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y)$
2. $\sup(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(y, x)) = 1$
3. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x, y), y) = \sup(x, y)$
4. $\inf(x, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(x)) \leq_L \sup(y, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}(y))$, i.e. $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}}}$ is een Kleene negator op L

Bewijs. 1., 2. en 3. worden aangetoond in o.m. [128]. Om 4. te bewijzen gaan we eerst na dat de Kleene voorwaarde equivalent is met, voor x, y in L ,

$$x \leq_L \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x) \text{ en } y \geq_L \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y) \Rightarrow x \leq_L y \quad (2.2)$$

Inderdaad, veronderstel dat (2.2) geldt. Uit het feit dat $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}$ een involutieve negator is op L volgt

$$\begin{aligned} \inf(x, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x)) &\leq_L \sup(x, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x)) = \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(\inf(x, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x))) \\ \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(\sup(y, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y))) &= \inf(y, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y)) \leq_L \sup(y, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y)) \end{aligned}$$

en dus wegens (2.2) dat $\inf(x, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x)) \leq_L \sup(y, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y))$. Omgekeerd volgt uit de Kleene voorwaarde gemakkelijk dat (2.2) voldaan is.

Weze nu $x \leq_L \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x)$ en $y \geq_L \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y)$. Dan is het duidelijk dat

$$\mathcal{I}_T(y, x) \leq_L \mathcal{I}_T(\mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(y), \mathcal{N}_{\mathcal{I}_T}(x)) = \mathcal{I}_T(x, y)$$

en dus, wegens 2., $\mathcal{I}_T(x, y) = \sup(\mathcal{I}_T(x, y), \mathcal{I}_T(y, x)) = 1$. Op basis van de residueringsvoorwaarde (2.1) leidt men tenslotte gemakkelijk af dat $x \leq_L y$. $\square$

Men kan zich de vraag stellen hoe MV-algebra's zich verhouden tot de Smets–Magrez axioma's uit de vorige paragraaf. Voor het bijzondere geval van het eenheidsinterval geldt het volgende resultaat.

2.32 Stelling. Een implicator I op $[0, 1]$ voldoet aan de Smets–Magrez axioma's (A.1) te.m. (A.6) a.s.a. ($[0, 1], \leq, T$) een MV-algebra is waarbij $I = I_T$.

Bewijs. Zij vooreerst I een implicator op $[0, 1]$ die voldoet aan (A.1)–(A.6). Dan is wegens de resultaten uit Voorbeeld 2.26 $I = I_T$ voor een continue, nilpotente, archimedische t -norm T op $[0, 1]$ en a fortiori (cfr. Voorbeeld 2.28) is $([0, 1], \leq, T)$ een geresidueerde tralie. Gelet op Definitie 2.30 volstaat het aan te tonen dat N_I involutief is en dat de deelbaarheidseigenschap voldaan is. Zij daartoe x, y in $[0, 1]$:

- Wegens (A.2) en (A.3) geldt: $x = I(1, x) = I(N_I(x), 0) = I(1, N_I(N_I(x))) = N_I(N_I(x))$.
- Zij $x \leq y$. Wegens de continuïteit van T geldt:

$$\begin{aligned} T(y, I_T(y, x)) &= T(y, \sup\{\gamma \in [0, 1] \mid T(y, \gamma) \leq x\}) \\ &= \sup\{T(y, \gamma) \mid \gamma \in [0, 1] \text{ en } T(y, \gamma) \leq x\} \\ &= x \end{aligned}$$

Stellen we nu $z = I_T(y, x)$, dan is voldaan aan $T(y, z) = x$.

De diverse elementen die leiden tot de omgekeerde implicatie werden bewezen in [128]. $\square$

2.33 Opmerking. Eén der motivaties achter geresidueerde tralies, en i.h.b. achter hun verfijning MV-algebra's, schuilt in de *distributed van de eigenschappen van een Boole-algebra over meerdere connectieven*. [108] Inderdaad, beschouwen we de Huntington axioma's uit Opmerking 2.3. De eigenschappen (B.1)–(B.3), resp. (B.1')–(B.3'), zijn geldig voor de $\wedge$ - en $\vee$ -bewerkingen in elke distributieve tralie. Anderzijds gaat men na dat in een MV-algebra $(L, \leq_L, \mathcal{T})$ voldaan is aan $\mathcal{T}(x, \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)) = 0$ en $\mathcal{S}(x, \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(x)) = 1$ voor x in L en waarbij $\mathcal{S}$ de duale t-conorm van $\mathcal{T}$ is t.o.v. $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$; deze eigenschappen gelden als een invulling van de axioma's (B.4) en (B.4') waarbij $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ en $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ de rol van $\wedge, \vee$ en $'$ resp. overnemen.

Voor een formele studie van de syntactische en semantische afleidingsrelatie binnen de op de MV-algebra $([0, 1], \leq, T_W)$ gebaseerde vaaglogica verwijzen we naar o.m. [108] en [128].

2.1.4 Bitralies

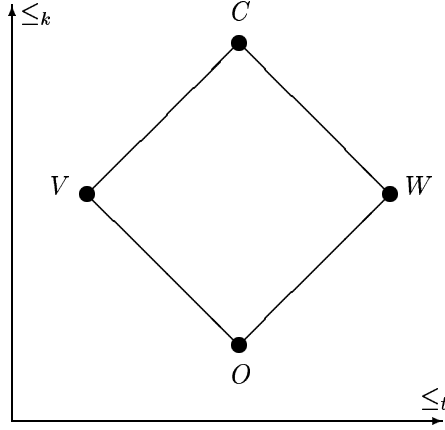
Tot dusver zijn we steeds uitgegaan van een unieke evaluatieschaal die toelaat de elementen in een gegeven verzameling te ordenen volgens een vooropgesteld criterium; elk van de uitdrukkingen “ x is meer waar dan y ”, “ x is meer lid (van een klasse) dan y ”, “ x bevat meer informatie dan y ”, ... is een mogelijke talige representatie van de formule $x \geq_L y$ in een poset $(L, \leq_L)$. Soms is het evenwel wenselijk, zowel vanuit pragmatische overwegingen als omwille van de transparantie, twee (eventueel gerelateerde) schalen te hanteren. We illustreren dit met een voorbeeld.

2.34 Voorbeeld. Tegenstrijdigheden zijn niet weg te denken uit ons bestaan. Soms vloeien dergelijke contradicties voort uit een identificeerbare absurditeit in de premissen, maar intrigerender zijn inconsistenties in de beschrijvingen van een complex reëel systeem waarover men slechts over een fragmentarische en/of hypothetische kennis beschikt. Diverse aanpakken, zoals paraconsistente en adaptieve logica's [10], behoeven een overijverig afleidingsmechanisme er voor willekeurige instanties van de regel $A \wedge \neg A \models B$ (lees: formule B is een logisch gevolg van de conjunctie van formule A en haar negatie) te genereren, en op die manier know-how tot trivialiteit te laten verworden.

De oplossing die Belnap [11] voorstelde bestaat erin meer waarheidswaarden in te voeren, en die waarheidswaarden te zien als *epistemische toestanden*, dit zijn (geestes)toestanden waarin een *agent* (reëel dan wel kunstmatig) zich kan bevinden als hij antwoord moet geven op een vraag [125]. Naast de klassieke waarheidswaarden “waar” (W) en “vals” (V) voor een propositie P , beschouwde Belnap ook “onbekend” (O) en “contradictie” (C), die respectievelijk aangeven dat de agent geen, of tegenstrijdige informatie heeft over P .

Figuur 2.1 toont twee zinvolle manieren om deze vier waarden te ordenen: $V \leq_t W$ betekent bijvoorbeeld dat V een “minder ware” waarde is dan W , terwijl we onder $V \leq_k C$ verstaan dat een contradictorische propositie P meer *kennis* veronderstelt (nl. dat P én waar én vals is) dan één die (enkel) vals

is. Belnap [11] noemde $(\{O, V, W, C\}, \leq_t)$ “waarheidstralie” (*truth lattice*) en $(\{O, V, W, C\}, \leq_k)$ “informatietralie” (*information lattice*).



Figuur 2.1: Belnaps pre-bitralie $(\{O, V, W, C\}, \leq_t, \leq_k)$.

2.35 Definitie (Pre-bitralie). [67] Zij $\leq_t$ en $\leq_k$ twee orderrelaties op eenzelfde niet-ledige verzameling L . Dan heet $(L, \leq_t, \leq_k)$ een pre-bitralie indien $(L, \leq_t)$ en $(L, \leq_k)$ beide complete tralies zijn.

Zoals uiteengezet in Voorbeeld 2.34 reiken de twee ordeningen in bovenstaande definitie twee maatstaven voor de evaluatie van elementen x en y van L , gezien als waarheidswaarden, aan:

- $x \leq_t y$ houdt in dat y “minstens even waar” is als x
- $x \leq_k y$ betekent dat y “minstens evenveel informatie” bevat als x

2.36 Definitie (Bitralie). [75] Zij $(L, \leq_t, \leq_k)$ een pre-bitralie en zij $\mathcal{N}$ een $L \rightarrow L$ afbeelding die voldoet aan, voor x, y in L ,

1. $x \leq_t y \Rightarrow \mathcal{N}(y) \leq_t \mathcal{N}(x)$
2. $x \leq_k y \Rightarrow \mathcal{N}(x) \leq_k \mathcal{N}(y)$
3. $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$

Dan noemen we $(L, \leq_t, \leq_k, \mathcal{N})$ een bitralie.

De bewerking $\mathcal{N}$ is dus een negator op de tralie $(L, \leq_t)$ die de $\leq_k$ -orde bewaart. Een duale bewerking, *conflator* genoemd, is een $L \rightarrow L$ afbeelding $\mathcal{C}$ die voldoet aan

1. $x \leq_t y \Rightarrow \mathcal{C}(x) \leq_t \mathcal{C}(y)$

$$2. \ x \leq_k y \Rightarrow \mathcal{C}(y) \leq_k \mathcal{C}(x)$$

$$3. \ \mathcal{C}(\mathcal{C}(x)) = x$$

2.37 Definitie (Consistente en exacte elementen). [67] Gegeven een bitralie $(L, \leq_t, \leq_k, \mathcal{N})$ met conflatator $\mathcal{C}$. Dan heet x in L exact (m.b.t. $\mathcal{C}$) indien $x = \mathcal{C}(x)$ en consistent (m.b.t. $\mathcal{C}$) indien $x \leq_k \mathcal{C}(x)$.

In navolging van wat gebruikelijk is in de literatuur, noteren we de infimum- en supremumbewerking corresponderend met $\leq_t$ en $\leq_k$, als $\wedge$ en $\vee$, en $\otimes$ en $\oplus$ respectievelijk. Een bitralie $(L, \leq_t, \leq_k, \mathcal{N})$ heet:

- *distributief* als alle 12 distributieve wetten tussen $\wedge$, $\vee$, $\otimes$ en $\oplus$ gelden. [75]
- *verweefd* (interlaced) als $\otimes$ en $\oplus$ stijgend zijn m.b.t. $\leq_t$ en $\wedge$ en $\vee$ stijgend zijn m.b.t. $\leq_k$. [66]

Tsoukiàs [125] beweert dat “*interlacity is the minimum property of a bilattice to ensure it is not just two lattices stuck together*”. Helemaal kunnen we die uitspraak niet onderschrijven, daar de koppeling tussen $(L, \leq_t)$ en $(L, \leq_k)$ in de eerste plaats gebeurt door de afbeelding $\mathcal{N}$; de genoemde eigenschap houdt wel in dat monotoniteit “over beide ordeningen heen” geldt. Een distributieve bitralie is uiteraard steeds verweefd.

2.38 Voorbeeld. Met het oog op verder gebruik identificeren we de waarheidswaarden in Belnaps pre-bitralie met de elementen uit $\{0, 1\}^2$ a.d.h.v. herschrijfgeregels $O \rightarrow (0, 0)$, $V \rightarrow (0, 1)$, $W \rightarrow (1, 0)$ en $C \rightarrow (1, 1)$. Zij $\mathcal{N}$ de $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$ afbeelding bepaald door, voor (x_1, x_2) in $\{0, 1\}^2$, $\mathcal{N}(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, dan is $(\{0, 1\}^2, \leq_t, \leq_k, \mathcal{N})$ een distributieve bitralie. Bovendien is de $\{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$ afbeelding $\mathcal{C}$ gegeven als $\mathcal{C}(x_1, x_2) = (1 - x_2, 1 - x_1)$ voor (x_1, x_2) in $\{0, 1\}^2$ een conflatator. De consistente elementen zijn $(0, 0)$, $(0, 1)$ en $(1, 0)$, waarvan enkel de laatste twee ook exact zijn. Merk ook op dat we met deze notatie een element (x, y) in $\{0, 1\}$ kunnen opvatten als opgebouwd uit een positieve component of “waarheidswaarde” x en een negatieve component of “valsheidswaarde” y , wat dit model dus tot een prachtvoorbeeld van een tweezijdige aanpak tot de voorstelling van imprecisie maakt.

2.2 Verzamelingtheoretische Structuren

2.2.1 L -vaagverzamelingen

Vaagverzamelingen (*fuzzy sets*) werden voorgesteld door Zadeh [141] als uitbreiding op klassieke of *scherpe* verzamelingen. Ze lenen zich uitermate goed tot de behandeling van *slecht gestelde evaluatieproblemen*, i.e. waarbij het voor een gegeven klasse of universum van objecten U niet steeds ondubbelzinnig uit te maken is of objecten al dan niet (perfect) voldoen aan een bepaalde eigenschap of predicaat P . Waar de scherpe verzamelingenleer staat op een abrupte tweedeling van het universum in enerzijds de objecten die wel voldoen en anderzijds

zij die niet voldoen aan P , spelen vaagverzamelingen in op de inherent vage semantiek van P , door een graduele overgang van niet naar wel voldoen toe te laten.

2.39 Definitie (Vaagverzameling). Een vaagverzameling A in een universum U wordt gekarakteriseerd door een $U \rightarrow [0, 1]$ afbeelding, μ_A of kortweg A genoteerd en *lidmaatschapsfunctie* van A genoemd. Voor elke u in U drukt de lidmaatschapsgraad $A(u)$ de mate uit waarin u tot A behoort. De klasse der vaagverzamelingen in U noteert men $\mathcal{F}(U)$.

De afbeelding van elementen uit het universum op het eenheidsinterval dirigeert een totale ordening $\leq_U$ op U a.d.h.v. $u_1 \leq_U u_2 \iff A(u_1) \leq A(u_2)$ voor u_1, u_2 in U . Hierin schuilen zowel de kracht als de beperkingen van vaagverzamelingenleer: de kracht, daar de (mogelijk betwistbare) semantiek van exacte lidmaatschapsgraden erdoor ondergeschikt wordt aan de ordening die het gevolg is van hun toekenning; de beperking ook, want waar een dergelijke totale ordening voor de meeste numerieke universa (zoals bv. lengte, leeftijd, ...) geen enkel probleem vormt, bestaat bij niet-numerieke universa het gevaar hierdoor een artificieel en soms ronduit ongewenst vergelijkingskader te scheppen (zie ook [46]). Denken we bijvoorbeeld aan het evaluatieprobleem om in iemands kennissenkring de in mindere of meerdere mate interessante mensen te onderscheiden. Welke criteria bepalen bv. hoe de vergelijking tussen onze bureauchef en een verre neef uitvalt? In 1967 stelde Goguen [76] daarom de notie van een L -vaagverzameling voor, waarvan de lidmaatschapsfunctie waarden aanneemt in een tralie $(L, \leq_L)$. Voor de eenvoud beperken we ons hier zoals in wat voorafging tot complete tralies.

2.40 Definitie (L -vaagverzameling). Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie met 1_L als grootste en 0_L als kleinste element. Een L -vaagverzameling A in een universum U wordt gekarakteriseerd door een $U \rightarrow L$ afbeelding, μ_A of kortweg A genoteerd en lidmaatschapsfunctie van A genoemd. Voor elke u in U drukt de lidmaatschapsgraad $A(u)$ de mate uit waarin u tot A behoort. De klasse der L -vaagverzamelingen in U noteert men $\mathcal{F}_L(U)$.

Men ziet onmiddellijk in dat, als een bijzonder geval, $[0, 1]$ -vaagverzamelingen samenvallen met de notie ingevoerd in Definitie 2.39. Gebruikmakend van de ordening $\leq_L$ op L en van de veralgemeende connectieven uit paragraaf 2.1.2 kan men L -vaagverzamelingen voorzien van de volgende bewerkingen.

2.41 Definitie (Verzamelingtheoretische bewerkingen). Zij A en B L -vaagverzamelingen in U , $\mathcal{N}$ een negator op L en $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ een t -norm en een t -conorm op L . Dan definieert men

- het $\mathcal{N}$ -complement $co_{\mathcal{N}}(A)$ van A als de L -vaagverzameling in U bepaald door, voor u in U , $co_{\mathcal{N}}(A)(u) = \mathcal{N}(A(u))$.
- de $\mathcal{T}$ -doorsnede $A \cap_{\mathcal{T}} B$ van A en B als de L -vaagverzameling in U bepaald door, voor u in U , $(A \cap_{\mathcal{T}} B)(u) = \mathcal{T}(A(u), B(u))$.

- de S -unie $A \cup_S B$ van A en B als de L -vaagverzameling in U bepaald door, voor u in U , $(A \cup_S B)(u) = S(A(u), B(u))$.

Bovendien zegt men dat A bevat, of geïnccludeerd, is in B , genoteerd $A \subseteq B$, indien $A(u) \leq_L B(u)$ voor elke u in U . Merk op dat de relatie $\subseteq$ een orderrelatie vormt op $\mathcal{F}_L(U)$.

2.42 Voorbeeld. Zijn A en B vaagverzamelingen in U , dan noteert men $co_{N_s}(A)$, $A \cap_{T_M} B$ en $A \cup_{S_M} B$ verkort als $co(A)$, $A \cap B$ en $A \cup B$ respectievelijk.

Met elke L -vaagverzameling in U stemt een klasse van scherpe verzamelingen in U , niveauverzamelingen genoemd, overeen.

2.43 Definitie (Niveauverzameling). Zij A een L -vaagverzameling in U en α in L . Dan definieert men de (zwakke) α -niveauverzameling A_α en de sterke α -niveauverzameling $A_{\overline{\alpha}}$ als

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{u \mid u \in U \text{ en } A(u) \geq_L \alpha\} \\ A_{\overline{\alpha}} &= \{u \mid u \in U \text{ en } A(u) >_L \alpha\} \end{aligned}$$

De 1-niveauverzameling van A noemt men ook de *kern* van A , genoteerd $ker A$; de sterke 0-niveauverzameling heet ook de *drager* van A , genoteerd $supp A$. Een L -vaagverzameling A in U heet *genormaliseerd* indien $(\exists u \in U)(A(u) = 1_L)$.

We brengen vervolgens ook de notie van een L -vaagrelatie in herinnering. Voor onze doeleinden speelt dit concept vooral een belangrijke rol in het kader van *vaagrelationele beelden*, waarmee we in de volgende hoofdstukken uitgebreid kennis zullen maken.

2.44 Definitie (L -vaagrelatie). Onder een L -vaagrelatie tussen U en V verstaat men elke L -vaagverzameling R in het cartesiaans product $U \times V$. Indien $U = V$ spreken we ook van een binaire L -vaagrelatie over U .

L -vaagverzamelingen zijn voor ons vooral uitermate belangrijk als syntactisch referentiekader voor de tweezijdige extensies van vaagverzamelingen die we in het volgende hoofdstuk bestuderen: intervalwaardige en intuïtionistische vaagverzamelingen.

Intervalwaardige Vaagverzamelingen

Het idee om het lidmaatschap $A(u)$ van een element u tot een vaagverzameling A te vervangen door een interval waartoe $A(u)$ geacht wordt te behoren, blijkt het eerst gelanceerd te zijn door Sambuc [113], die de corresponderende objecten de naam “fonctions Φ -floues” meegaf. Later raakte door het werk van o.m. Gorzalczany [77] en Türkşen [126] de benaming “interval-valued fuzzy sets” in zwang. In het Nederlands hebben we het dan over *intervalwaardige vaagverzamelingen*; om de notatie te verlichten gebruiken we ook de afkorting IWV.

2.45 Definitie (Intervalwaardige vaagverzameling). Een IWV A in U wordt gekarakteriseerd door een koppel (μ_A^l, μ_A^u) van $U \rightarrow [0, 1]$ afbeeldingen zo dat $\mu_A^l(u) \leq \mu_A^u(u)$, voor elke u in U . μ^l (resp. μ^u) noemen we de onderlidmaatschapsfunctie (resp. bovenlidmaatschapsfunctie) van A .

Algemeen kan men stellen dat IWVs het verplichte nummer om met een vaag concept een eenduidig bepaalde lidmaatschapsfunctie te laten overeenstemmen achterwege laten en afzwakken door slechts het bestaan van een onder- en een bovenlidmaatschapsfunctie, bepaald door intervalwaardige lidmaatschapsgraden, voorop te stellen. Naar de praktijk toe bestaan diverse interpretaties (zie bv. [60, 85, 98, 106, 126]):

- Gelet op het context- en gebruikersafhankelijk karakter van vaagverzamelingen kunnen verschillende experten die samen één vaag concept moeten karakteriseren verschillende opinies zijn toegedaan; een IWV kan dan als de omhullende van hun individueel voorgestelde lidmaatschapsfuncties fungeren.
- Men kan wel overeenstemming vinden over een procedure om lidmaatschapsgraden toe te kennen aan welbepaalde objecten (bv. iemand van 80 jaar noemt men oud in de mate 1), maar de objecten zelf zijn onvoldoende gekend (bv. van een groep mensen kennen we slechts bij benadering de leeftijd). Hierbij is dus sprake van *onvolledige informatie* omtrent de exacte, onbekende lidmaatschapsgraad.
- In het kader van *benaderend redeneren* worden imprecieze invoergegevens (onder de vorm van vaagverzamelingen) verwerkt tot een imprecies inferentieresultaat. Zoals we in hoofdstuk 5 zullen zien, bestaan er goede redenen waarom het resultaat van dit afleidingsproces een IWV zou zijn.

Samenvattend kunnen we stellen dat IWVs als tweezijdig model vooral een benaderend karakter hebben: ze proberen een “voortvluchtig” imprecies concept op een zo exact mogelijk wiskundig patroon vast te enten, zonder de semantiek van het concept geweld te doen.

Intervalwaardige vaagverzamelingenleer kan men ook zien als het analogon van imprecieze probabiliteitsleer, waar intervallen, begrensd door een onder- en bovenprobabiliteit, de klassieke probabiliteiten vervangen (zie bv. [130]).

Los van de semantiek die men eraan vastkoppelt wordt het formeel rekenen met IWVs vereenvoudigd door hen op te vatten als bijzondere L -vaagverzamelingen, zoals volgende stelling aangeeft.

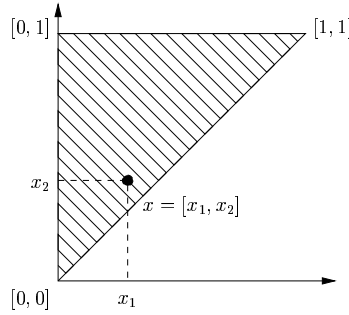
2.46 Stelling. [74] Een IWV A in U is een L^I -vaagverzameling waarbij de tralie $(L^I, \leq_{L^I})$ bepaald wordt door:

$$L^I = \{[x, y] \mid (x, y) \in [0, 1]^2 \text{ en } x \leq y\}$$

$$[x_1, x_2] \leq_{L^I} [y_1, y_2] \iff x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \leq y_2$$

M.a.w., A is een $U \rightarrow L^I$ afbeelding zo dat $A(u) = [\mu_A^l(u), \mu_A^u(u)]$.

Figuur 2.2 geeft de tralie $(L^I, \leq_{L^I})$ grafisch weer: intervalwaardige lidmaatschapsgraden worden voorgesteld door punten in de driehoek L^I .

Figuur 2.2: De tralie $(L^I, \leq_{L^I})$.

Intuitionistische Vaagverzamelingen

Intuitionistische vaagverzamelingen (verkort tot IVs) zijn het geesteskind van Atanassov [3]. Ze druisen in tegen de impliciete veronderstelling dat wanneer een element u bv. in de mate μ “behoort” tot een vaagverzameling A , het dan noodzakelijkerwijs “niet behoort” tot A in de mate $1 - \mu$.

2.47 Definitie (Intuitionistische vaagverzameling). Een IV A in U wordt gekarakteriseerd door een koppel (μ_A, ν_A) van $U \rightarrow [0, 1]$ afbeeldingen zo dat $\mu_A(u) + \nu_A(u) \leq 1$, voor elke u in U . μ_A (resp. ν_A) noemen we de lidmaatschapsfunctie (resp. niet-lidmaatschapsfunctie) van A . Voor elke u in U drukt de lidmaatschapsgraad $\mu_A(u)$ de mate uit waarin u tot A behoort, en de niet-lidmaatschapsgraad $\nu_A(u)$ de mate waarin u niet tot A behoort.

Een bijzondere deelklasse van de IVs in U vormt degene waarvoor

$$\nu_A(u) = 1 - \mu_A(u) \quad (2.4)$$

voor elke u in U . Men kan deze klasse eenvoudig identificeren met $\mathcal{F}(U)$. Door de positieve of lidmaatschaps- en negatieve of niet-lidmaatschapscomponent afzonderlijk te evalueren, en enkel te vereisen dat de som van de bekomen resultaten ten hoogste 1 bedraagt, zwakken IVs bovenstaande gelijkheid af tot een ongelijkheid. Ze schuwen daarmee het (partieel) conflict daar elementen niet simultaan wél en niet (perfect) tot een IV kunnen behoren, maar tonen zich open voor onbepaaldheden die resulteren uit het relaxeren van (2.4); de afbeelding π_A , gedefinieerd door $\pi_A(u) = 1 - \mu_A(u) - \nu_A(u)$ voor u in U , kwantificeert een *marge van onbepaaldheid* (ook: marge van onzekerheid, twijfelmarge). [6]

Zonder zich op een bepaalde zienswijze vast te pinnen, zou men kunnen stellen dat IVs inzetbaar zijn voor problemen waarbij *ontbrekende informatie* omtrent vage begrippen aan de orde is. Een zinvolle analogie is de volgende: denk bijvoorbeeld aan de situatie waarin een bedrijfskader zich moet uitlaten over de uitvoering van bedrijfsplan A dan wel B . Terwijl iedereen doorgaans voor zichzelf wel enkele positieve en negatieve punten van A en B kan aanhalen,

zijn er ook typisch aspecten waarover men zich niet bevoegd of gekwalificeerd voelt om een oordeel te vellen, of waarover men over onvoldoende argumenten beschikt. Als die laatste de overhand gaan nemen, kan men besluiten zich te *onthouden* van de stemming. In die zin kan men de coëfficiënt $\pi_A(u)$ beschouwen als de mate waarin men zich “onthoudt” van de classificatie van het object u m.b.t. het imprecieze concept A .

2.48 Opmerking. Dat niet iedereen onverdeeld gelukkig is met de naam “intuitionistische vaagverzameling” moge blijken uit o.m. [23, 24]; het argument achter de naamkeuze is dan ook geensins dat IVs zouden bedoeld zijn als een “ervaging” van de intuitionistische logica, zoals de naam misschien valselyk doet vermoeden, maar veeleer een verwijzing naar het feit dat voor IVs de “wet van het uitgesloten derde (cfr. Sectie 2.1.2) niet meer geldig is op elementniveau” [6], i.e. $\mu_A(u)$ en $\nu_A(u)$ vullen samen niet noodzakelyk de gehele evaluatieschaal $[0,1]$ op. Of dit laatste al dan niet voldoende is om de gebruikte terminologie te rechtvaardigen, wensen we hier in het midden te laten.

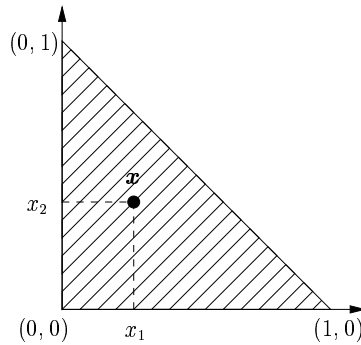
Niettegenstaande de bijzondere semantiek die we aan IVs toekennen is het mogelijk hen formeel voor te stellen als L -vaagverzamelingen.

2.49 Stelling. [131] Een IV A in U is een L^* -vaagverzameling waarbij de tralie $(L^*, \leq_{L^*})$ bepaald wordt door:

$$L^* = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, 1]^2 \text{ en } x + y \leq 1\}$$

$$(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2) \iff x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \geq y_2$$

M.a.w., A is een $U \rightarrow L^*$ afbeelding zo dat $A(u) = (\mu_A(u), \nu_A(u))$.



Figuur 2.3: De tralie $(L^*, \leq_{L^*})$.

Figuur 2.3 laat zien hoe koppels van mogelyke lidmaatschaps- en niet-lidmaatschapsgraden gelinkt worden aan punten in de driehoek L^* . De schuine zijde van de driehoek beschrijft de verzameling D van elementen waarvoor de som van lidmaatschapsgraad en niet-lidmaatschapsgraad gelijk is aan 1.

De overduidelijke gelijkenis tussen deze figuur en figuur 2.2 suggereert bovendien het volgende belangrijke en eenvoudig te verifiëren resultaat:

2.50 Stelling. $(L^*, \leq_{L^*})$ en $(L^I, \leq_{L^I})$ zijn orde-isomorfe tralies, i.e. er bestaat een $L^* \rightarrow L^I$ bijectie f , gedefinieerd als $f(x_1, x_2) = [x_1, 1 - x_2]$ voor (x_1, x_2) in L^* die voldoet aan

$$(x_1, x_2) \leq_{L^*} (y_1, y_2) \iff f(x_1, x_2) \leq_{L^I} f(y_1, y_2)$$

Deze stelling heeft tot gevolg dat de loutere “syntax” van IWVs en IVs dezelfde is. In hoofdstuk 3 zullen dan ook we bij het ontwikkelen van een syntactisch kader voor deze twee modellen handig gebruik maken van de tralie $(L^*, \leq_{L^*})$ als een gemeenschappelijke onderliggende structuur die toelaat abstractie te maken van deze of gene verschijningsvorm. In die zin omzeilen we alvast de beweging die aanleiding heeft gegeven tot een verwarrende “hokjesliteratuur” waarbij bepaalde resultaten uit de ene hoek ofwel gedupliceerd worden, ofwel onbekend blijven in de andere hoek. We mogen evenwel in onze euforie niet blind blijven voor bepaalde “barstjes” dat het keurslijf, waarin de L -vaagverzamelingenleer IWVs en IVs dwingt, vertoont: ook dit maakt een punt van discussie uit in het volgende hoofdstuk.

2.2.2 Wazigverzamelingen

In 1968 stelde Gentilhomme [73], een linguïst, in het ongewisse omtrent Zadehs toen nog zeer recente werk, een aantal tekortkomingen van de klassieke verzamelingenleer met betrekking tot talige evaluatieproblemen aan de kaak. Wat is bijvoorbeeld een “politieroman”, hoe definieert men formeel een “grammaticale fout”, wanneer heeft een zin betekenis? Het is duidelijk, valt Gentilhomme Zadeh bij, dat “*une partition binaire simplifie les faits de langue d’une façon difficilement tolérable*”. Hij speelt zelfs even met de idee om aan de te karakteriseren objecten coëfficiënten tussen 0 en 1 toe te kennen naargelang zij slechter of beter aan een vage eigenschap voldoen (“*une attitude probabiliste*”), maar verwerpt haar algauw; wie moet immers die coëfficiënten vastleggen? Een commissie van experts? Welke experts dan? “*Le problème de l’échantillon se pose avec toute sa complexité*”. Gentilhommes onbewuste afwijzing is de vaagverzamelingenleer blijven achtervolgen, want veel mensen hebben het nog steeds, en niet altijd onterecht, moeilijk met het context- en gebruikersafhankelijk karakter van lidmaatschapsfuncties.

De aanpak die Gentilhomme voorstond is in essentie eenvoudiger dan Zadehs programma. In plaats van een vloeiende overgang van niet naar wel voldoen aan een slecht gestelde eigenschap, stelt Gentilhomme slechts een driedeling van het universum voorop: dat bijvoorbeeld “De Cock en de moord in reclame” van A. C. Baantjer een politieroman is, en “Eric of het klein insectenboek” van Godfried Bomans niet, moge voor iedereen duidelijk zijn, maar hoe zit het met “De dag van de uil” van Leonardo Sciascia, waarin de “klassieke” thema’s van misdaad en opheldering worden opgevoerd maar waaronder vooral een bittere maatschappijkritiek schuilt? Dergelijke objecten komen terecht in een wazige zone, i.e. waarvoor lidmaatschap betwistbaar, onbepaalbaar of onzeker is.

2.51 Definitie (Wazigverzameling). Zij U een niet-ledige verzameling en E_1, E_2 in $\mathcal{P}(U)$ zo dat $E_1 \subseteq E_2$. Dan heet het koppel (E_1, E_2) een wazigverzameling (*flow set*) in U . E_1 noemt men het zeker gebied, E_2 het gebied van maximale extensie en $E_2 \setminus E_1$ de wazige zone. De klasse van alle wazigverzamelingen in U noteren we $\mathcal{Fl}(U)$.

Wazigverzamelingen zijn een getrouwe uitbreiding van scherpe verzamelingen. Met elke E in $\mathcal{P}(U)$ komt eenduidig een wazigverzameling (E, E) overeen, en vice versa. Gentilhomme definieerde verzamelingtheoretische bewerkingen op wazigverzamelingen; zij $(E_1, E_2), (E'_1, E'_2)$ in $\mathcal{Fl}(U)$:

$$\begin{aligned} (E_1, E_2) \cup (E'_1, E'_2) &= (E_1 \cup E'_1, E_2 \cup E'_2) \\ (E_1, E_2) \cap (E'_1, E'_2) &= (E_1 \cap E'_1, E_2 \cap E'_2) \\ co(E_1, E_2) &= (coE_2, coE_1) \\ (E_1, E_2) \subseteq (E'_1, E'_2) &\iff E_1 \subseteq E'_1 \text{ en } E_2 \subseteq E'_2 \end{aligned}$$

De structuur $(\mathcal{Fl}(U), \subseteq, co)$ is een Kleene-tralie. Wazigverzamelingen kunnen ook zinvol ingebed worden in zowel de traditionele als de intuïtionistische vaagverzamelingenleer. Inderdaad, met een wazigverzameling (E_1, E_2) in U kunnen we een vaagverzameling A en een IV A' in U associëren, gegeven door, voor u in U :

$$A(u) = \begin{cases} 1 & \text{indien } u \text{ in } E_1 \\ 0.5 & \text{indien } u \text{ in } E_2 \setminus E_1 \\ 0 & \text{indien } u \text{ in } U \setminus E_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

$$A'(u) = \begin{cases} 1_{L^*} & \text{indien } u \text{ in } E_1 \\ (0, 0) & \text{indien } u \text{ in } E_2 \setminus E_1 \\ 0_{L^*} & \text{indien } u \text{ in } U \setminus E_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Samenvattend kunnen we stellen dat wazigverzamelingen tweezijdige modellen van imprecisie zijn met een duidelijk approximerend karakter: de wazige zone, begrensd door het zeker gebied en het gebied van maximale extensie, bakent de probleemelementen af waarover we geen uitspraak kunnen of willen doen. Wazigverzamelingen vormen ook het opstapje tot ruwverzamelingen die we in de volgende paragraaf bestuderen: met enige ruimte voor interpretatie kan men immers stellen dat ruwverzamelingen wazigverzamelingen zijn met een sluitende procedure om de wazige zone te construeren.

2.2.3 Ruwverzamelingen

Typische *gegevensvolumes* omvatten een veelheid aan individuele data die de neerslag vormen van wetenschappelijk onderzoek, bedrijfsresultaten, metingen allerhande, ... en waarin men doorgaans weinig structuur ontwaart. Om zich een meer globaal beeld van de gegevens te vormen, met alle verbanden, afhankelijkheden en regelmatigheden die erin vervat zitten, loont het daarom abstractie te maken van de individuen (objecten, elementen) door ze te gaan samenvoegen of clusteren tot betekenisvolle informatiegranules, m.a.w. door het universum

	DIPL	UW	RW	RG	RKI
d_1	Wetenschappen–Wiskunde	8	[70–80[	[70–80[	O
d_2	Latijn–Wiskunde	8	[60–70[	[70–80[	V
d_3	Moderne Talen–Wiskunde	6	[70–80[	[60–70[	V
d_4	Moderne Talen–Wiskunde	6	[70–80[	[60–70[	OV
d_5	Latijn–Wiskunde	8	[90–100]	[80–90[	GO
d_6	Wetenschappen–Wiskunde	8	[60–70[	[70–80[	OV
d_7	Moderne Talen–Wiskunde	6	[70–80[	[80–90[	V
d_8	Moderne Talen–Wiskunde	6	[70–80[	[60–70[	OV

Tabel 2.4: Generatiestudenten Informatica

te “verruwen”. Doordat we de elementen niet meer als op zichzelf staand benaderen is het niet steeds meer mogelijk om bepaalde concepten (i.e. deelverzamelingen van U) exact te omschrijven, maar moeten we een beroep doen op benaderingen a.d.h.v. de opgebouwde clusters. Dit vormt het oogmerk van de ruwverzamelingenleer.

Het formeel onderzoek naar ruwverzamelingen (*rough sets*) werd gestart in de vroege jaren 1980 door Pawlak (zie o.m. [109]). De concrete aanleiding vormde de analyse en classificatie van objecten a.d.h.v. hun beschrijving in datatabelen. Tabel 2.4 schetst een eenvoudig voorbeeld. Van een aantal generatiestudenten Informatica zijn gegevens omtrent hun secundaire studies bekend, zoals de gekozen studierichting (DIPL), het wekelijks aantal genoten uren wiskunde-onderwijs (UW), het eindresultaat wiskunde (RW) en het globaal eindresultaat (RG) behaald in het laatste jaar secundair onderwijs, beide tot op een tiental nauwkeurig. Een laatste attribuut geeft voor elk van hen het behaalde resultaat in de eerste kandidatuur informatica (RKI). We nemen aan dat de mogelijke waarden voor RKI komen uit de verzameling {onvoldoende (OV), voldoende (V), onderscheiding (O), grote onderscheiding (GO), grootste onderscheiding (GSO)}. Een interessante vraag is nu: kan men gebruikmakend van enkel de attributen DIPL, UW, RW en RG (die we *conditionele attributen* zullen noemen) een karakterisering bekomen van de verzameling studenten die slaagt, i.e. waarvoor het *beslissingsattribuut* RKI behoort tot {V,O,GO,GSO}?

Uit de tabel blijkt dadelijk waar het schoentje knelt: met d_3 en d_4 stemt exact dezelfde omschrijving overeen, i.e. d_3 en d_4 zijn *ononderscheidbaar* m.b.t. de conditionele attributen, maar toch is hun waarde voor het beslissingsattribuut verschillend. Niettemin kan men uit de gegevens van de tabel een aflijning maken van de studenten die zeker slagen en van diegenen die zeker falen. Deze begrippen kunnen als volgt worden geformaliseerd.

Pawlak Ruwverzamelingen

Gegeven een universum U van objecten (bv. studenten) waarover we het willen hebben, een verzameling A van voorbeelden van een bepaald concept C (bv. “geslaagd”) en een equivalentierelatie over U , i.e. een reflexieve, symmetri-

sche en transitieve relatie R over U die de objecten partitioneert in equivalentieklassen van ononderscheidbare objecten. Het koppel (U, R) noemen we een *Pawlak benaderingsruimte*. In het voorbeeld van Tabel 2.4 zijn er op basis van de beschikbare conditionele attributen zes equivalentieklassen, nl. $\{d_1\}$, $\{d_2\}$, $\{d_3, d_4, d_8\}$, $\{d_5\}$, $\{d_6\}$, $\{d_7\}$. Met het oog op de hybridisering die we doorvoeren in hoofdstuk 4 hanteren we het formalisme van R -voorverzamelingen om equivalentieklassen te beschrijven: de R -voorverzameling van v in U is de verzameling $Rv = \{u \mid u \in U \text{ en } (u, v) \in R\}$. Men gaat eenvoudig na dat voor u, v in U geldt dat ofwel $Ru \cap Rv = \emptyset$, ofwel $Ru = Rv$, m.a.w. de R -voorverzamelingen beschrijven een partitie van het universum.

2.52 Opmerking. Gelet op de symmetrie van R is het uiteraard ook mogelijk gebruik te maken van R -navverzamelingen om equivalentieklassen te beschrijven: de R -navverzameling van u in U is de verzameling $uR = \{v \mid v \in U \text{ en } (u, v) \in R\}$.

We benaderen de verzameling A nu op twee manieren. De volgende deelverzamelingen van U noemen we de onder- en bovenbenadering van A in de Pawlak benaderingsruimte (U, R) :

$$\underline{apr}_R(A) = \{v \mid v \in U \text{ en } Rv \subseteq A\} \quad (2.7)$$

$$\overline{apr}_R(A) = \{v \mid v \in U \text{ en } Rv \cap A \neq \emptyset\} \quad (2.8)$$

Als onderliggende betekenis hechten we hieraan dat $\underline{apr}_R(A)$ de verzameling is van elementen die zeker tot A (sterk lidmaatschap) behoren terwijl $\overline{apr}_R(A)$ de elementen bevat die mogelijk (zwak lidmaatschap) tot A behoren; immers, v behoort tot $\underline{apr}_R(A)$ indien al de elementen uit U die door R niet te onderscheiden zijn van v tot A behoren (er is m.a.w. geen enkele twijfel dat v ook tot A behoort), terwijl v tot $\overline{apr}_R(A)$ behoort zo gauw er een element bestaat in A dat niet te onderscheiden valt van v . Behoort v tot het grensgebied $\overline{apr}_R(A) \setminus \underline{apr}_R(A)$, dan bestaat er twijfel want in dat geval is v tegelijkertijd ononderscheidbaar van minstens één element in A en één element niet in A .

Een verzameling A in $\mathcal{P}(U)$ heet definieerbaar [111], of ook wel scherp [24] of R -exact [122] in (U, R) indien $\underline{apr}_R(A) = \overline{apr}_R(A)$. Pawlak [110] zelf heeft het over “samengestelde verzamelingen”, dit zijn willekeurige unies van equivalentieklassen, inclusief de lege verzameling. Men gaat eenvoudig na dat samengestelde verzamelingen definieerbaar zijn, en vice versa.

Ook over het begrip “ruwverzameling” zelf zijn de bronnen het niet altijd met elkaar eens. Sommige auteurs noemen A in $\mathcal{P}(U)$ een ruwverzameling indien $\underline{apr}_R(A) \neq \overline{apr}_R(A)$ (zie bv. [92]). Anderen, zoals Pawlak [109] en Thiele [123] noteren een ruwverzameling (A_1, A_2) en verstaan hieronder de klasse van alle elementen die A_1 en A_2 respectievelijk als onder- en bovenbenadering hebben in (U, R) . Cattaneo en Ciucci [22] zien een ruwverzameling dan weer als een afbeelding die een deelverzameling van U afbeeldt op het koppel van haar onder- en bovenbenadering. Nog een andere benadering stelt dat een koppel (A_1, A_2) een ruwverzameling is in (U, R) zodra er een verzameling $A \subseteq U$ is waarvoor

$\underline{apr}_R(A) = A_1$ en $\overline{apr}_R(A) = A_2$ (zie bv. [111]); (A_1, A_2) noemt men daarom de ruwverzameling van A . Zonder aan de algemeenheid te schaden kiezen we in dit werk voor de laatste optie. Om het begrip dat we zonet hebben ingevoerd te onderscheiden van andere alternatieve en/of veralgemeende aanpakken die voorkomen in de literatuur en waarvan we er in de volgende paragraaf enkele bekijken, hebben we het soms ook expliciet over *Pawlak ruwverzamelingen*.

De onder- en bovenbenaderingen in een Pawlak benaderingsruimte hebben de volgende eigenschappen: (zie bv. [138])

1. $\overline{apr}_R(A) = co(\underline{apr}_R(coA))$
 $\underline{apr}_R(A) = co(\overline{apr}_R(coA))$
2. $\underline{apr}_R(A) \subseteq A \subseteq \overline{apr}_R(A)$
3. $A \subseteq B \Rightarrow (\underline{apr}_R(A) \subseteq \underline{apr}_R(B) \text{ en } \overline{apr}_R(A) \subseteq \overline{apr}_R(B))$
4. $\underline{apr}_R(A \cap B) = \underline{apr}_R(A) \cap \underline{apr}_R(B)$
 $\overline{apr}_R(A \cap B) \subseteq \overline{apr}_R(A) \cap \overline{apr}_R(B)$
5. $\underline{apr}_R(A \cup B) \supseteq \underline{apr}_R(A) \cup \underline{apr}_R(B)$
 $\overline{apr}_R(A \cup B) = \overline{apr}_R(A) \cup \overline{apr}_R(B)$

2.53 Opmerking. Uit bovenstaande eigenschappen blijkt het approximerend karakter van ruwverzamelingen: een concept wordt benaderd langs “onder” en “boven” door duale benaderingsoperatoren $\underline{apr}_R$ en $\overline{apr}_R$, die instanties die hetzij zeker wel, hetzij zeker niet bij het concept horen te selecteren. Merk ook op dat om bv. de onderbenadering van $A \cup B$ te bekomen, het niet volstaat om $\underline{apr}_R(A)$ en $\underline{apr}_R(B)$ te verenigen daar soms een nauwere benadering mogelijk is. Het is dus steeds nodig expliciet aan de equivalentierelatie R en de te benaderen verzameling $A \cup B$ te refereren.

Keren we terug naar ons voorbeeld uit Tabel 2.4. De ruwverzameling van $\{V, O, GO, GSO\}$ is het koppel $(\{d_1, d_2, d_5, d_7\}, \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_7, d_8\})$ dat dus de meest nauwkeurige omschrijving van het concept “geslaagd” in termen van de attribuutwaarden voorstelt. Enkele belangrijke toepassingen van Pawlak ruwverzamelingen zijn:

- het ontdekken van afhankelijkheden tussen attributen: men gaat bv. na dat in het voorbeeld de waarde van het attribuut UW volledig is bepaald door de waarde van DIPL, bijgevolg de equivalentierelatie niet *verfijnt* en dus weggelaten kan worden.
- het analyseren van de relevantie van attributen. Sommige attributen kan men niet ongestraft elimineren. Bijvoorbeeld, als men in Tabel 2.4 enkel de attributen DIPL en UW gebruikt, resteren er slechts 3 equivalentieklassen, en bijgevolg komen er bij het benaderen van een concept A meer objecten in het grensgebied $\overline{apr}_R(A) \setminus \underline{apr}_R(A)$ terecht. In [139] passeert een reeks probabilistisch geïnspireerde kwaliteitsmaten voor de benadering de revue.
- het genereren van beslissingsregels voor classificatie en kennisontginning. Regelmatigheden in data, zoals bv. de vaststelling dat mensen komend uit

de studierichting Latijn–Wiskunde met minstens 80 % op wiskunde in het laatste jaar secundair onderwijs (nagenoeg) altijd slagen, zijn interessant zowel om “voorspellingen” te doen naar nieuwe studenten toe als om inzicht te verwerven in de materie op zich (welke pijnpunten merken we in de relatie vooropleiding–academische studie, en hoe kunnen we die bijstellen). Generieke regels waarop zeer weinig uitzonderingen voorkomen zijn daarbij uiteraard te verkiezen op specifieke regels die enkel sporadisch gelden. De inductie van vaagregels uit data, waarbij gebruik gemaakt wordt van het bijkomend vermogen tot informatie–compactie dat vaagverzamelingen bieden, komt aan bod in het zesde hoofdstuk.

Ruwverzamelingen binnen een Ruimere Context

Ruwverzamelingen hebben de wetenschappelijke wereld allerminst onberoerd gelaten. Nauwe verbanden met gevestigde domeinen als wiskundige topologie en modale logica brachten wederzijdse verrijking. In [134] en [138] wordt een mooi beeld geschetst van hoe rond de oorspronkelijke kern een opeenvolging van steeds algemener en eleganter constructies werd bijgebouwd die alle het idee van tweezijdigheid (“zeker wel” en “mogelijk wel”) in de benadering van gegevens in het vaandel dragen.

Twee mogelijke richtingen waarin Pawlaks originele ideeën kunnen uitgebreid worden zijn met het oog op het verdere verloop van dit werk het vermelden waard. Men kan R veralgemenen tot een binaire relatie op U die niet noodzakelijk een equivalentierelatie hoeft te zijn, en men kan ook afstappen van het idee dat een verzameling en haar benaderingen over hetzelfde universum zijn gedefinieerd.

In het eerste geval bekomt men *veralgemeende benaderingsruimten*; formules (2.7) en (2.8) kunnen nog steeds worden gebruikt bij de definitie van onder- en bovenbenaderingen (en dus van ruwverzamelingen), maar

- daar de R –voorverzamelingen Rv de ruimte U niet noodzakelijk partitioneren gelden niet alle eigenschappen van Pawlak ruwverzamelingen.
- wanneer R niet symmetrisch is, kan men niet langer ongestraft de definities (2.7) en (2.8) vervangen door gebruik te maken van de R –navverzamelingen in de zin van Opmerking 2.52.

In de literatuur werd o.m. uitgebreid onderzoek gedaan naar benaderingsruimten met reflexieve en symmetrische R (ook *tolerantierelatie* genoemd), en met reflexieve en transitieve R . [138]

De tweede uitbreiding leidt tot de studie van wat Wong et al. [134] *veralgemeende ruwverzamelingen* noemen. De relatie R is daarbij gedefinieerd tussen de universa U en V ; V is een verzameling van *beschrijvingen* v die al dan niet van toepassing zijn op de te karakteriseren objecten in u in U : $(u, v) \in R$ indien v een beschrijving is van u . We veronderstellen enkel dat R *serieel* is, i.e. voor elke u in U bestaat er een object v in V zo dat $(u, v) \in R$. Gebruikmakend

van de R -nverzamelingen uR , u in U , kunnen we twee benaderingen van een deelverzameling $A \subseteq V$ vooropstellen die zelf deelverzamelingen zijn van U :

$$\underline{apr}_R(A) = \{u | u \in U \text{ en } uR \subseteq A\} \quad (2.9)$$

$$\overline{apr}_R(A) = \{u | u \in U \text{ en } uR \cap A \neq \emptyset\} \quad (2.10)$$

In de volgende paragraaf over tweevoudige vaagverzamelingen zullen we vertrekken van een concrete situatie waarin deze aanpak haar nut bewijst.

Tussen ruw- en vaagverzamelingenleer was de relatie vreemd genoeg aanvaardbaar, daar beide theorieën elkaar eerder als een bedreiging—ze leken inzetbaar voor hetzelfde type problemen—dan als potentiële partners ervoeren. Stonden beide in de jaren 1980 nog als antagonisten tegenover elkaar, verschenen ze uiteindelijk toch schoorvoetend voor het altaar. De details vernemen we in hoofdstuk 4.

Misschien nog opmerkelijker, maar alleszins minder gemediatiseerd, is de verhouding tot wazigverzamelingen. Klaarblijkelijk hebben ruwverzamelingen de opdeling van het universum in drie zones (met grofweg dezelfde interpretatie) met ze gemeen. Vanuit constructief oogpunt kan men daarom stellen dat met de ontwikkeling van ruwverzamelingenleer een grote stap voorwaarts in de toepassing van Gentilhommes gedachtengoed is gezet, daar op die manier een semantisch verdedigbare en computationeel haalbare constructiemethode voor de drie gebieden tot stand is gekomen. Immers, gezien $\underline{apr}_R(A) \subseteq \overline{apr}_R(A)$ leidt men eenvoudig af dat alle Pawlak ruwverzamelingen in (U, R) ook wazigverzamelingen in U zijn. Aan de andere kant is het niet steeds mogelijk gegeven een wazigverzameling (A_1, A_2) in U een equivalentierelatie R te vinden zo dat (A_1, A_2) een ruwverzameling is in (U, R) . Onderstel namelijk dat A_2 één element meer dan A_1 bevat, i.e. $A_2 = A_1 \cup \{u_0\}$, u_0 in $U \setminus A_1$. Als (A_1, A_2) de ruwverzameling van A in $\mathcal{P}(U)$ is dan geldt:

$$A_1 = \underline{apr}_R(A) \subseteq A \subseteq \overline{apr}_R(A) = A_2$$

Hieruit volgt dat ofwel $A_1 = A \subset A_2$ ofwel $A_1 \subset A = A_2$. In het eerste geval geldt dat uit $A_1 = A$ volgt dat $\underline{apr}_R(A) = A$. Maar dan is ook $\overline{apr}_R(A) = A$, wat in tegenspraak is met $A \subset \overline{apr}_R(A) = A_2$. In het tweede geval leidt een analoge redenering tot een contradictie.

Gerelateerd aan deze inbedding is de vraag of doorsnede, unie en complementering zoals ze zijn gedefinieerd voor wazigverzamelingen zin hebben voor ruwverzamelingen. Behalve een resultaat van Iwinski [83] dat de genoemde bewerkingen inwendig zijn voor Pawlak ruwverzamelingen (i.e. als (A_1, A_2) en (B_1, B_2) Pawlak ruwverzamelingen zijn in (U, R) , dan zijn $(A_1 \cap B_1, A_2 \cap B_2)$, $(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2)$ en (coA_2, coA_1) dat ook) lijkt weinig in die richting te wijzen, i.h.b. wanneer we ons herinneren (cfr. Opmerking 2.53) dat wanneer (A_1, A_2) en (B_1, B_2) de ruwverzamelingen van A en B respectievelijk zijn, dan niet noodzakelijk $(A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2)$ de ruwverzameling is van $A \cup B$.

Tot slot is het volgende resultaat van Cattaneo en Ciucci [22], dat een verband legt met de logische structuren waarvan we zijn vertrokken in dit hoofdstuk, vermeldenswaard: de structuur $(\mathcal{P}(U), \subseteq, co \circ \overline{apr}_R, co)$ met R een equivalentierelatie over U is een Brouwer–Kleene tralie. Met andere woorden, Pawlaks ruwverzamelingen breiden de klassieke verzamelingenleer uit met een alternatieve complementeringsbewerking: voor elke A in $\mathcal{P}(U)$ geeft $co(\overline{apr}_R(A))$ de elementen die niet via R in verband te brengen zijn met elementen van A . De structuur blijft behouden als R slechts een tolerantierelatie is.

2.2.4 Tweevoudige Vaagverzamelingen

Datatabellen trachten zo goed mogelijk de werkelijkheid te reflecteren: tussen diverse “unieke” objecten wordt gedifferentieerd naargelang de waarden die ze aannemen voor een aantal vooropgestelde, discriminerende attributen. Waar we in de vorige paragraaf begaan waren met de beperkingen van een dergelijke granulering, richten we ons hier op een (ogenschijnlijk) meer fundamenteel defect: namelijk, dat sommige attribuutwaarden niet, of onvolledig, gekend zijn.

Formeel, zij U een universum van objecten en zij a een attribuut dat van toepassing is op de elementen uit U , en dat waarden aanneemt in een universum V ; in wezen is a dus een $U \rightarrow V$ afbeelding. Wanneer sommige attribuutwaarden onvolledig zijn gekend, kan men dit opvangen door a af te zwakken tot een seriële relatie tussen U en V , i.e. we vereisen slechts dat met elke u in U één of meerdere mogelijke waarden in V corresponderen. Die mogelijke waarden van object u voor attribuut a groeperen we in de a -naverzameling van u , die we hier $a(u)$ noteren. In het geval bijvoorbeeld de waarde van a voor u volledig onbekend is, geldt $a(u) = V$.

In [57] beschouwen Dubois en Prade nu het volgende probleem: gegeven A in $\mathcal{V}$, wat is de verzameling I (resp. C) van objecten uit U wier attribuutwaarde *zeker* (resp. *mogelijk*) tot A behoort⁶? Het antwoord op deze tweeledige vraag luidt:

$$I = \{u | u \in U \text{ en } a(u) \subseteq A\} \quad (2.11)$$

$$C = \{u | u \in U \text{ en } a(u) \cap A \neq \emptyset\} \quad (2.12)$$

(I, C) wordt de tweevoudige verzameling (*twofold set*) van A in U genoemd.

2.54 Opmerking. Terugblikkend op Sectie 2.2.3 kunnen we ons ervan vergewissen dat de aangereikte oplossing een mooie illustratie is van het begrip “veralgemeende ruwverzameling”: inderdaad, $I = \underline{apr}_a(A)$ en $C = \overline{apr}_a(A)$. In [57] haasten Dubois en Prade zich niettemin te waarschuwen dat

“The interpretation of rough sets and twofold sets are very different; a rough set corresponds to the idea of a set S whose elements are individually identified, but which is difficult to perfectly characterize in terms of attribute values, while a twofold set corresponds to a

⁶ I staat hierbij voor *interior* (inwendige) en C voor *closure* (sluiting).

set of objects which is perfectly characterized in terms of attribute values[...], but ill-delimited in terms of its elements.”

Misschien correcter is te stellen dat tweevoudige verzamelingen zich onderscheiden van Pawlak ruwverzamelingen doordat ze de objecten die bepaalde waarden aannemen voor het (beslissings)attribuut a niet karakteriseren in termen van de waarden voor andere (conditionele) attributen, maar in termen van de (onvolledig gekende) waarden voor a zelf.

Men gaat na dat uit de serialiteit van a volgt dat $I \subseteq C$. Omgekeerd bestaan voor elk koppel (I, C) van deelverzamelingen van U waarvoor $I \subseteq C$ een seriële relatie a tussen U en V en een deelverzameling A van V zo dat (I, C) de tweevoudige verzameling van A is in U m.b.t. a . Op grond hiervan kan men bv. eenvoudig een isomorfisme met wazigverzamelingen construeren.

In wat volgt willen we nog even dieper ingaan op de onvolledigheid in informatie die het uitgangspunt voor tweevoudige verzamelingen vormt, om zo een eerste aanzet te geven tot het hybridiseringsproces dat ons wacht in Hoofdstuk 4. We wapenen ons daartoe met enkele belangrijke begrippen.

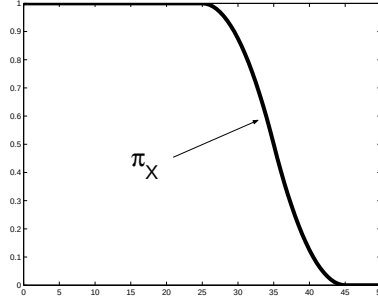
Intermezzo: Enkele Begrippen uit de Possibiliteitsleer

De door Zadeh ingevoerde possibiliteitsleer [145] vindt haar wortels in de oudere, intuïtieve notie van een *elastische restrictie* [144]: een veranderlijke X wordt gekarakteriseerd door een aantal gegevens, die niet noodzakelijk scherp hoeven te zijn, maar die ons toelaten om een zeker onderscheid te maken tussen de min of meer plausible waarden voor X . Wanneer men bijvoorbeeld te horen krijgt dat Veerle “jong” is, dan kunnen we daaruit niet haar exacte leeftijd afleiden, noch een scherp interval waartoe die behoort, maar niettemin ligt het buiten ieders verwachting dat Veerle 85 zou zijn. Formeel kunnen we met elke leeftijd u een waarde tussen 0 en 1 laten overeenstemmen, die aangeeft in welke mate het volgens onze appreciatie *mogelijk* is dat Veerle exact u jaar oud is. Over hoe die toekenning in haar werk zou moeten gaan, kan men discussiëren, maar de gangbare hypothese (zie bv. [18, 145]) stelt dat gegeven een vaagverzameling *jong*, de mogelijkheid dat $X = u$ gegeven wordt door de mate waarin u als jong wordt beschouwd, m.a.w. door *jong*(u). Een mogelijke keuze voor de possibiliteitsdistributie in ons voorbeeld vindt men in Figuur 2.4.

2.55 Definitie (Possibiliteitsdistributie). Onder een possibiliteitsdistributie van een veranderlijke X verstaan we elke $U \rightarrow [0, 1]$ afbeelding π_X , met U het universum U waarin X waarden aanneemt, die voldoet aan

$$(\exists u \in U)(\pi_X(u) = 1)$$

Merk op dat X ook een samengestelde veranderlijke kan zijn, bv. $X = (X_1, X_2)$. In dat geval wordt π_X ook de gezamenlijke possibiliteitsdistributie van X_1 en



Figuur 2.4: Possibiliteitsdistributie π_X van Veerles leeftijd.

X_2 genoemd. Afgeleid van π_X is de zogenaamde *necessiteitsdistributie* ν_X , gedefinieerd als $\nu_X(u) = 1 - \pi_X(u)$: het stelt de *zekerheid* (of *necessiteit*) voor dat X verschillend is van u (en t.z.t. ook de onmogelijkheid dat X gelijk is aan u).

2.56 Definitie (Possibiliteit, Necessiteit). [18] Zij A een vaagverzameling in U en π_X de possibiliteitsdistributie van een veranderlijke X die waarden aanneemt in U . De possibiliteit en necessiteit van A worden gedefinieerd als:

$$\begin{aligned}\Pi_X(A) &= \sup_{u \in U} \min(A(u), \pi_X(u)) \\ N_X(A) &= \inf_{u \in U} \max(A(u), 1 - \pi_X(u)) = \inf_{u \in U} I_{S_M}(\pi_X(u), A(u))\end{aligned}$$

$\Pi_X(A)$ gaat na in welke mate het mogelijk is dat de waarde van X behoort⁷ tot A , terwijl $N_X(A)$ de mate weergeeft waarin we er zeker van kunnen zijn dat deze waarde behoort tot A . Er geldt: $\Pi_X(\{u\}) = \pi_X(u)$ en $N_X(\{u\}) = \inf_{v \neq u} (\nu_X(v))$, $N_X(A) \leq \Pi_X(A)$. Men gaat ook gemakkelijk na dat

$$\begin{aligned}\Pi_X\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) &= \sup_{j \in J} \Pi_X(A_j) \\ N_X\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) &= \inf_{j \in J} N_X(A_j)\end{aligned}$$

en dat voor A in $\mathcal{P}(U)$ geldt $\max(\Pi_X(A), \Pi_X(\text{co}A)) = 1$, $\min(N_X(A), N_X(\text{co}A)) = 0$. Bovendien zijn Π en N duale maten in de zin dat:

$$\Pi_X(A) = 1 - N_X(\text{co}A)$$

⁷Toegegeven, het begrip “behoren tot een vaagverzameling” doet bij een eerste lezing bevreemdend aan. De definitie geeft in feite weer dat de potentiële impact van een element u in U op $\Pi(A)$ en $N(A)$ wordt gewogen a.d.h.v. zijn lidmaatschap in A .

2.57 Opmerking. Uit de eigenschappen van Π_X en N_X leidt men eenvoudig af dat $[N_X(A), \Pi_X(A)] = [N_X(A), 1 - N_X(\text{co}(A))]$. Gebruik makend van de bijectie uit Stelling 2.50 kan men dit omvormen tot het element $(N_X(A), N_X(\text{co}(A)))$ van L^* , dat dus de zekerheid omtrent $X \in A$ naast de zekerheid omtrent $X \notin A$ plaatst.

Tweevoudige Vaagverzamelingen

We formuleren nu een extensie van het raamwerk ingevoerd bij het begin van deze sectie. De waarde van een onvolledig gekend attribuut kan meer algemeen worden gekarakteriseerd door een possibiliteitsdistributie op dat attribuut, met andere woorden: $a(u)$ is een vaagverzameling in V .

Zij u in U , A in $\mathcal{F}(V)$. Noem X_u de veranderlijke die de waarde van $a(u)$ weergeeft, i.e. $\pi_{X_u}(v)$ is de mogelijkheid dat v in V de waarde is van het attribuut a voor u . Dan bepalen de uitdrukkingen

$$I(u) = N_X(A) = \inf_{v \in V} \max(A(v), 1 - \pi_{X_u}(v)) \quad (2.14)$$

$$C(u) = \Pi_X(A) = \sup_{v \in V} \min(A(v), \pi_{X_u}(v)) \quad (2.15)$$

een koppel (I, C) van vaagverzamelingen in U waarvoor $I \subseteq C$ dat we de tweevoudige vaagverzameling van A in U noemen. Men gaat na dat indien A en $a(u)$ scherpe verzamelingen in V zijn, men opnieuw de uitdrukkingen (2.11) en (2.12) verkrijgt.

Tweevoudige vaagverzamelingen lenen zich bijzonder goed tot het verwerken van *zoekopdrachten* aan een *vaagdatabank*. Gegeven de *zoekvoorwaarde* A levert de tweevoudige vaagverzameling van A twee collecties van objecten uit de databank waarvan de eerste min of meer zeker, en de tweede min of meer mogelijk, aan de gestelde vraag voldoen.

2.58 Opmerking. De hierboven ingevoerde definitie is algemener dan wat de auteurs in [57] voorstellen. Voor hen is een tweevoudige vaagverzameling in U formeel een koppel (I, C) van vaagverzamelingen in U waarvoor $\text{supp}(I) \subseteq \text{ker}(C)$. Men gaat na dat de formules (2.14) en (2.15) hieraan voldoen wanneer A scherp is.

Hoofdstuk 3

Tweezijdigheid in de Extensies van Vaagverzamelingen

Niets is lastiger om aan te pakken,
hachelijker om er de leiding over te nemen,
of minder zeker van succes,
dan het invoeren van nieuwe dingen,
omdat degene die nieuwigheden invoert,
hen die het in de oude toestanden goed ging tot vijanden
en hen die het onder de nieuwe omstandigheden goed zou kunnen gaan,
als lauwe verdedigers heeft.
(Machiavelli)

Op een markt waar qua expressiviteit, efficiëntie en vermogen tot hybridisering steeds stricter eisen worden gesteld aan kennisgebaseerde systemen, profileren intuïtionistische vaagverzamelingen en intervalwaardige vaagverzamelingen zich nadrukkelijk als ambitieuze en beloftevolle spelers; inderdaad, door resoluut een tweezijdige kaart te trekken slagen zij er in, de traditionele vaagverzamelingenleer wezenlijk te verfijnen zonder te verzanden in louter theoretische bespiegelingen; getuige daarvan hun snel toenemende aantal toepassingen (zie bv. [6, 98]).

Nochtans blijft in de literatuur rond dat uithangbord van tweezijdigheid een ietwat geheimzinnige waas hangen, en wil a.h.w. geen van beide kleur bekennen omtrent zijn “ware aard”. Immers, zoals we reeds zagen zijn IVs en IWWs syntactisch elkaars evenknie, hebben we er dan überhaupt baat bij een scheidslijn tussen hen te willen trekken? Een grondige ontleding van beider verhouding tot het concept van tweezijdigheid is daarom aan de orde. In het bijzonder argumenteren we, door hen zowel historisch als strict-formeel te situeren in een ruimer kader dat o.m. ook bitralies en hogere-orde vaagverzamelingen omvat,

dat zij elkaar rendez-vous geven op een drukbezocht “kruispunt van imprecisie”.

Vooraleer we tot dit scharnierpunt van het proefschrift komen, richt een formele studieronde zich eerst op hun gemeenschappelijke evaluatiestructuur L^* ; naast een zuiver logische benadering waarin aansluiting gezocht wordt met de begrippen uit het voorgaande hoofdstuk, treden ook meer geavanceerde concepten zoals inclusiematen en het voorstellen van vaagrelationele beelden voor het voetlicht, in een vooruitblik op de rol die zij verderop te spelen hebben, en t.z.t. ook als stille getuigen van het niet-triviale karakter van IVs en IWVs.

Enkele Afspraken i.v.m. Notatie

Voor een goed begrip expliciteren we enkele conventies die we doorheen dit hoofdstuk hanteren. Zoals reeds aangekondigd rekenen we formeel met L^* -vaagverzamelingen, met de onderliggende wetenschap dat we aan deze voorstelling steeds eenduidig een equivalente IV en IWV kunnen hechten. De eerste en tweede component van een element x in L^* noteren we x_1 en x_2 , respectievelijk. Indien f een $L^* \rightarrow L^*$ afbeelding is, kunnen we de eerste (tweede) component van $f(x)$ schrijven m.b.v. de eerste (tweede) projectie $pr_1 f(x)$ ($pr_2 f(x)$). Voor een L^* -vaagverzameling A in U en een element u van U verkorten we $pr_1 A(u)$, $pr_2 A(u)$ en $1 - pr_1 A(u) - pr_2 A(u)$ voor de eenvoud tot $\mu_A(u)$, $\nu_A(u)$ en $\pi_A(u)$ respectievelijk.

Het infimum en supremum over de complete, distributieve tralie $(L^*, \leq_{L^*})$ worden gegeven door, voor x, y in L^* ,

$$\begin{aligned} \inf(x, y) &= (\min(x_1, y_1), \max(x_2, y_2)) \\ \sup(x, y) &= (\max(x_1, y_1), \min(x_2, y_2)) \end{aligned}$$

De bijzondere verzamelingtheoretische bewerkingen $\cap_{\inf}$ en $\cup_{\sup}$ korten we af tot $\cap$ en $\cup$. Het grootste element $(1, 0)$ van L^* noteren we verkort 1_{L^*} , het kleinste element $(0, 1)$ schrijven we ook 0_{L^*} . Een bijzondere deelverzameling van L^* is $D = \{x \mid x \in L^* \text{ en } x_1 = 1 - x_2\}$, de verzameling van “exacte” elementen van L^* .

3.1 L^* als Logische Evaluatiestructuur

3.1.1 Negatoren

Naar analogie met vaaglogica onderscheiden we binnen de klasse der negatoren op L^* (ingevoerd via Definitie 2.4) een welbepaalde *standaardnegator* $\mathcal{N}_s$, bepaald door $\mathcal{N}_s(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, voor alle x in L^* . Het bijhorende verzamelingtheoretische complement $co_{\mathcal{N}_s}$ noteren we kortweg co .

Involutieve negatoren op L^* kunnen eenduidig worden gekarakteriseerd in termen van involutieve negatoren op $[0, 1]$ a.d.h.v. volgende representatiestelling.

3.1 Stelling. [53] Zij $\mathcal{N}$ een involutieve negator op L^* , en N de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ afbeelding bepaald door, voor a in $[0, 1]$, $N(a) = pr_1 \mathcal{N}(a, 1 - a)$. Dan is N

een involutieve negator op $[0, 1]$, en bovendien geldt voor x in L^* dat $\mathcal{N}(x) = (N(1 - x_2), 1 - N(x_1))$.

3.2 Gevolg. Een involutieve negator $\mathcal{N}$ op L^* voldoet steeds aan $\mathcal{N}(0, 0) = (0, 0)$ en aan

$$(\forall x, y \in D)(\mathcal{N}(x, y) \in D)$$

wat we afkorten tot $\mathcal{N}(D, D) \subseteq D$.

3.3 Stelling. Een Kleene negator op L^* bestaat niet.

Bewijs. Onderstel dat de $L^* \rightarrow L^*$ afbeelding $\mathcal{N}$ een Kleene negator op L^* zou zijn. Dan is $\mathcal{N}$ involutief en heeft derhalve wegens Stelling 3.1 de representatie, voor x in L^* , $\mathcal{N}(x) = (N(1 - x_2), 1 - N(x_1))$ met N een involutieve negator op $[0, 1]$. Beschouw dan x in L^* zo dat $x_1 > 0, x_2 > 0$. Men vindt:

$$\begin{aligned} \inf((x_1, x_2), \mathcal{N}(x_1, x_2)) &= \inf((x_1, x_2), (N(1 - x_2), 1 - N(x_1))) \\ &= (\min(x_1, N(1 - x_2)), \max(x_2, 1 - N(x_1))) \end{aligned}$$

Er moet nu gelden dat $\inf(x, \mathcal{N}(x)) \leq_{L^*} \sup(y, \mathcal{N}(y))$ voor elke y in L^* , en in i.h.b. moet $(\min(x_1, N(1 - x_2)), \max(x_2, 1 - N(x_1))) \leq_{L^*} \sup((0, 0), \mathcal{N}(0, 0)) = (0, 0)$. Uit $N(1 - x_2) = 0$ volgt $x_2 = 0$, in strijd met de onderstelling dat $x_2 > 0$. $\square$

Een Brouwer-negator op L^* is daarentegen eenvoudig te vinden.

3.4 Voorbeeld. Definieer, voor x in L^* ,

$$\mathcal{N}_g(x) = \begin{cases} 1_{L^*} & \text{indien } x = 0_{L^*} \\ 0_{L^*} & \text{anders} \end{cases}$$

$(L^*, \leq_{L^*}, \mathcal{N}_g)$ is een Brouwer tralie.

3.1.2 Triangulaire Normen en Conormen

Waar involutieve negatoren op L^* hand in hand gaan met hun tegenhangers op het eenheidsinterval, is de situatie voor t-normen en t-conormen aanzienlijk complexer.

3.5 Definitie (t-representeerbaarheid). [33] Een t-norm $\mathcal{T}$ op L^* (resp. t-conorm $\mathcal{S}$) wordt t-representeerbaar genoemd indien er een t-norm T en een t-conorm S op $[0, 1]$ (resp. een t-conorm S' en een t-norm T' op $[0, 1]$) bestaan zo dat, voor x, y in L^* ,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x, y) &= (T(x_1, y_1), S(x_2, y_2)) \\ \mathcal{S}(x, y) &= (S'(x_1, y_1), T'(x_2, y_2)) \end{aligned}$$

T en S (resp. S' en T') worden de representanten van $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{S}$) genoemd.

3.6 Voorbeeld. In [33] werd bewezen dat de nodige en voldoende voorwaarde waaronder een t -norm T en een t -conorm S op $[0,1]$ de representanten zijn van een t -representeerbare t -norm $\mathcal{T}$ op L^* is: $T(a, b) \leq 1 - S(1 - a, 1 - b)$ voor alle a, b in $[0, 1]$. Als bijzonder geval kunnen we een t -norm T op $[0,1]$ en zijn duale t -conorm S t.o.v. de standaardnegator N_s op $[0,1]$ beschouwen; Tabel 3.1 geeft een overzicht van enkele t -representeerbare t -normen en t -conormen die op die manier kunnen worden gegenereerd, samen met hun representanten. $\mathcal{T}_M^r$ en $\mathcal{S}_M^r$ kennen we reeds als het infimum en het supremum op L^* ; $\mathcal{T}_P^r$ en $\mathcal{S}_P^r$ noemen we het t -representeerbaar product en de t -representeerbare algebraïsche som op L^* , en $\mathcal{T}_W^r$ en $\mathcal{S}_W^r$, de t -representeerbare Lukasiewicz t -norm en t -conorm op L^* , respectievelijk.

Anderzijds associëren onderstaande procedures (gebaseerd op [51]) met duale T en S t.o.v. N_s een niet t -representeerbare t -norm $\mathcal{T}$ en t -conorm $\mathcal{S}$ op L^* . Zij x, y in L^* :

$$\mathcal{T}(x, y) = (T(x_1, y_1), \min(S(x_2, 1 - y_1), S(1 - x_1, y_2))) \quad (3.1)$$

$$\mathcal{S}(x, y) = (\min(S(x_1, 1 - y_2), S(1 - x_2, y_1)), T(x_2, y_2)) \quad (3.2)$$

In Tabel 3.2 vindt men enkele niet t -representeerbare t -normen en t -conormen op L^* die op die manier kunnen worden geconstrueerd. We hebben het dan respectievelijk over het niet t -representeerbaar infimum $\mathcal{T}_M^n$ en supremum $\mathcal{S}_M^n$, het niet t -representeerbaar product $\mathcal{T}_P^n$ en de niet t -representeerbare algebraïsche som $\mathcal{S}_P^n$, en de niet t -representeerbare Lukasiewicz t -norm $\mathcal{T}_W^n$ en t -conorm $\mathcal{S}_W^n$.

Het is ook vermeldenswaard dat niet elke niet t -representeerbare t -(co)norm in de vorm van formules (3.1) en (3.2) gegoten kan worden. Zo bepaalt de volgende uitdrukking, voor x, y in L^* , een niet t -representeerbare t -conorm op L^* die niet in de vorm van formule (3.2) kan geschreven worden: [33]

$$\mathcal{S}(x, y) = \begin{cases} x & \text{als } y = 0_{L^*} \\ y & \text{als } x = 0_{L^*} \\ (\max(1 - x_2, 1 - y_2), \min(x_2, y_2)) & \text{anders} \end{cases}$$

Voor verder gebruik binnen dit proefschrift noemen we de t -norm $\mathcal{T}$ gedefinieerd in (3.1) en de t -conorm $\mathcal{S}$ bepaald door (3.2) *pseudo t -representeerbaar met representanten T en S , resp. S en T* .

3.7 Opmerking. Het bestaan van niet t -representeerbare t -normen en t -conormen, voor het eerst gesignaleerd in [33], maakt komaf met de eerder al te gauw voor lief genomen onderstelling (zie bv. [21, 31, 74, 84]) dat t -(co)normen in een intervalwaardig of intuitionistisch vaag kader noodzakelijk zijn gebonden aan een koppel van connectieven op $[0,1]$.

3.1.3 Implicatoren

Men noemt een implicator $\mathcal{I}$ op L^* (bij uitbreiding) *t -representeerbaar*¹ indien $\mathcal{I}$ ofwel de S -implicator geïnduceerd door een t -representeerbare t -conorm op

¹Merk op dat het ook mogelijk is een meer direct concept als “ i -representeerbaarheid” in te voeren, waarbij naast implicatoren op $[0,1]$ ook een beroep gedaan wordt op hun duale

t-norm		representanten
$\mathcal{T}_M^r(x, y)$	$= (\min(x_1, y_1), \max(x_2, y_2))$	T_M, S_M
$\mathcal{T}_P^r(x, y)$	$= (x_1 y_1, x_2 + y_2 - x_2 y_2)$	T_P, S_P
$\mathcal{T}_W^r(x, y)$	$= (\max(x_1 + y_1 - 1, 0), \min(x_2 + y_2, 1))$	T_W, S_W
t-conorm		representanten
$\mathcal{S}_M^r(x, y)$	$= (\max(x_1, y_1), \min(x_2, y_2))$	S_M, T_M
$\mathcal{S}_P^r(x, y)$	$= (x_1 + y_1 - x_1 y_1, x_2 y_2)$	S_P, T_P
$\mathcal{S}_W^r(x, y)$	$= (\min(x_1 + y_1, 1), \max(x_2 + y_2 - 1, 0))$	S_W, T_W

Tabel 3.1: Enkele t-representeerbare t-normen en t-conormen op L^* en hun representanten $(x, y$ in $L^*)$.

t-norm	
$\mathcal{T}_M^n(x, y)$	$= (\min(x_1, y_1), \min(\max(x_2, 1 - y_1), \max(1 - x_1, y_2)))$
$\mathcal{T}_P^n(x, y)$	$= (x_1 y_1, \min(1 - y_1 + x_2 y_1, 1 - x_1 - x_1 y_2))$
$\mathcal{T}_W^n(x, y)$	$= (\max(x_1 + y_1 - 1, 0), \min(x_2 + 1 - y_1, y_2 + 1 - x_1, 1))$
t-conorm	
$\mathcal{S}_M^n(x, y)$	$= (\min(\max(x_1, 1 - y_2), \max(1 - x_2, y_1)), \min(x_2, y_2))$
$\mathcal{S}_P^n(x, y)$	$= (\min(1 - y_2 + x_1 y_2, 1 - x_2 + y_1 x_2), x_2 y_2)$
$\mathcal{S}_W^n(x, y)$	$= (\min(x_1 + 1 - y_2, y_1 + 1 - x_2, 1), \max(x_2 + y_2 - 1, 0))$

Tabel 3.2: Enkele niet t-representeerbare t-normen en t-conormen op L^* (x, y in L^*) .

S-implicator	
$\mathcal{I}_{S_M^r}(x, y)$	$= (\max(x_2, y_1), \min(x_1, y_2))$
$\mathcal{I}_{S_P^r}(x, y)$	$= (x_2 + y_1 - x_2 y_1, x_1 y_2)$
$\mathcal{I}_{S_W^r}(x, y)$	$= (\min(x_2 + y_1, 1), \max(x_1 + y_2 - 1, 0))$
R-implicator	
$\mathcal{I}_{T_M^r}(x, y)$	$= \begin{cases} 1_{L^*} & \text{als } x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \geq y_2 \\ (1 - y_2, y_2) & \text{als } x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 < y_2 \\ (y_1, 0) & \text{als } x_1 > y_1 \text{ en } x_2 \geq y_2 \\ (y_1, y_2) & \text{als } x_1 > y_1 \text{ en } x_2 < y_2 \end{cases}$
$\mathcal{I}_{T_P^r}(x, y)$	$= \begin{cases} 1_{L^*} & \text{als } x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 \geq y_2 \\ \left(\frac{1-y_2}{1-x_2}, \frac{y_2-x_2}{1-x_2}\right) & \text{als } x_1 \leq y_1 \text{ en } x_2 < y_2 \\ \left(\frac{y_1}{x_1}, 0\right) & \text{als } x_1 > y_1 \text{ en } x_2 \geq y_2 \\ \left(\min\left(\frac{y_1}{x_1}, \frac{1-y_2}{1-x_2}\right), \frac{y_2-x_2}{1-x_2}\right) & \text{als } x_1 > y_1 \text{ en } x_2 < y_2 \end{cases}$
$\mathcal{I}_{T_W^r}(x, y)$	$= (\min(1, 1 + y_1 - x_1, 1 + x_2 - y_2), \max(0, y_2 - x_2))$

Tabel 3.3: Enkele t-representeerbare implicatoren op L^* (x, y in L^*).

S-implicator	
$\mathcal{I}_{S_M^n}(x, y)$	$= (\min(\max(x_2, 1 - y_2), \max(1 - x_1, y_1)), \min(x_1, y_2))$
$\mathcal{I}_{S_P^n}(x, y)$	$= (\min(1 - y_2 + x_2 y_2, 1 - x_1 + y_1 x_1), x_1 y_2)$
$\mathcal{I}_{S_W^n}(x, y)$	$= (\min(1, 1 + y_1 - x_1, 1 + x_2 - y_2), \max(0, y_2 - 1 + x_1))$
R-implicator	
$\mathcal{I}_{T_M^n}(x, y)$	$= (\min(I_{T_M}(x_1, y_1), I_{T_M}(1 - x_2, 1 - y_2)), 1 - I_{T_M}(x_1, 1 - y_2))$
$\mathcal{I}_{T_P^n}(x, y)$	$= (\min(I_{T_P}(x_1, y_1), I_{T_P}(1 - x_2, 1 - y_2)), 1 - I_{T_P}(x_1, 1 - y_2))$
$\mathcal{I}_{T_W^n}(x, y)$	$= (\min(I_{T_W}(x_1, y_1), I_{T_W}(1 - x_2, 1 - y_2)), 1 - I_{T_W}(x_1, 1 - y_2))$
	$= (\min(1, 1 + y_1 - x_1, 1 + x_2 - y_2), \max(0, y_2 - 1 + x_1))$

Tabel 3.4: Enkele niet t-representeerbare implicatoren op L^* (x, y in L^*).

L^* , ofwel de R-implicator geïnduceerd door een t-representeerbare t-norm op L^* vormt. [33]

3.8 Voorbeeld. Tabel 3.3 geeft een overzicht van de t-representeerbare S- en R-implicatoren op L^* , geïnduceerd door de t-conormen uit Tabel 3.1 en de standaardnegator $\mathcal{N}_s$ op L^* , en door de t-normen uit dezelfde tabel, respectievelijk. Voor een gedetailleerde afleiding van de (reeds vrij complexe) gedaante van de R-implicatoren verwijzen we naar [35]. Merk ook op dat, in tegenstelling tot Tabel 2.2, de S-implicator $\mathcal{I}_{S_W^r}$ *niet* samenvalt met de R-implicator $\mathcal{I}_{T_W^r}$.

De R-implicator geïnduceerd door T_W^n en de S-implicator geïnduceerd door

operaties (m.b.t. een negator), de zogenaamde *co-implicatoren* (voor de definitie van co-implicatoren, zie bv. [56]). De klasse van implicatoren op L^* die we met deze aanpak bestrijken is echter ontoereikend voor onze doeleinden.

S_W^n en $\mathcal{N}_s$ worden beide door dezelfde uitdrukking gegeven, nl. voor x, y in L^* :

$$\mathcal{I}_{T_W^n}(x, y) = \mathcal{I}_{S_W^n}(x, y) = (\min(1, 1 + y_1 - x_1, 1 + x_2 - y_2), \max(0, y_2 - 1 + x_1)) \quad (3.3)$$

Meer algemeen vindt men in Tabel 3.4 de belangrijkste niet t-representeerbare implicatoren op L^* . De afleiding van de formules voor de R-implicatoren wordt beschreven in [51].

Lijkt formule (3.3) hier a.h.w. uit de lucht komen te vallen, in de volgende paragraaf zal blijken dat ze de spil vormt waarrond de uitbreidingen van de representatiestellingen uit Sectie 2.1.2 draaien. Het is in die zin des te opmerkelijker dat het minieme verschil tussen de uitdrukkingen voor $\mathcal{I}_{T_W^n}(x, y)$ en $\mathcal{I}_{T_W^n}(x, y)$ een dermate grote impact heeft op hun respectieve eigenschappen.

3.1.4 Representatiestellingen, Geresidueerde Tralies en MV-Algebra's

De uitbreiding tot L^* van de representatiestellingen voor continue, nilpotente, archimedische t-normen en t-conormen op $[0, 1]$ uit Voorbeeld 2.19 werd bestudeerd in [53]. Hoewel aan het continuïteitsbegrip voor afbeeldingen op L^* geen bijzondere moeilijkheden zijn verbonden (gezien L^* een deelverzameling vormt van $\mathbb{R}^2$), doen er zich enkele technische complicaties voor die ons dwingen “onder de motorkap” te kijken. In het bijzonder is de eigenschap gebruikt in Voorbeeld 2.28, nl. dat een links-continue t-norm op $[0, 1]$ steeds voldoet aan de residueringsvoorwaarde (2.1), niet uitbreidbaar tot L^* . [53] Dit ingrediënt uit de interne keuken dienen we dus te expliciteren, en dit *zowel voor t-normen als voor t-conormen*. Voor een t-conorm $\mathcal{S}$ op L^* luidt de residueringsvoorwaarde, voor x, y en z in L^* : [53]

$$\mathcal{S}(x, y) \geq_{L^*} z \iff y \geq_{L^*} \inf\{\gamma \mid \gamma \in L^* \text{ en } \mathcal{S}(x, \gamma) \geq_{L^*} z\} \quad (3.4)$$

Bovendien blijkt de karakteristiek nilpotentie zoals ingevoerd in Definitie 2.17 te zwak om een sluitende representatie toe te laten, derhalve introduceren we hier een stricter variant.

3.9 Definitie (Sterk nilpotente t-norm, t-conorm). [53] Een t-norm $\mathcal{T}$ op L^* heet sterk nilpotent indien er x, y in L^* bestaan waarvoor x_1, x_2, y_1, y_2 alle strict groter dan 0 zijn en $\mathcal{T}(x, y) = 0_{L^*}$. Een t-conorm $\mathcal{S}$ op L^* heet sterk nilpotent indien er x, y in L^* bestaan waarvoor $x_2 > 0, y_2 > 0$ en $\mathcal{S}(x, y) = 1_{L^*}$.

3.10 Stelling. [53] Een $L^* \rightarrow L^*$ afbeelding Φ is een continue stijgende permutatie van L^* met stijgende inverse Φ^{-1} als en slechts als er een continue, stijgende permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor alle x in L^* ,

$$\Phi(x) = (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2))$$

Bovendien is dan $\Phi^{-1}(x) = (\varphi^{-1}(x_1), 1 - \varphi^{-1}(1 - x_2))$.

3.11 Stelling. [53] $\mathcal{T}$ is een continue, sterk nilpotente, archimedische t-norm op L^* die voldoet aan de residueringsvoorwaarde (2.1), aan $\mathcal{T}(D, D) \subseteq D$ en aan $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$ als en slechts als er een stijgende, continue permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor alle x, y in L^* ,

$$\mathcal{T}(x, y) = (\varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(y_1) - 1)), 1 - \varphi^{-1}(\max(0, \varphi(x_1) + \varphi(1 - y_2) - 1, \varphi(y_1) + \varphi(1 - x_2) - 1)))$$

of ook, gelet op Stelling 3.10 en Tabel 3.2, als en slechts als er een continue stijgende permutatie Φ van L^* bestaat zo dat Φ^{-1} stijgend is en zo dat, voor x, y in L^* ,

$$\mathcal{T}(x, y) = \Phi^{-1}(\mathcal{T}_W^n(\Phi(x), \Phi(y)))$$

$\mathcal{T}$ noemt men ook de Φ -getransformeerde van $\mathcal{T}_W^n$.

3.12 Stelling. [53] $\mathcal{S}$ is een continue, sterk nilpotente, archimedische t-conorm op L^* die voldoet aan de residueringsvoorwaarde (3.4), aan $\mathcal{S}(D, D) \subseteq D$ en aan $\mathcal{S}((0, 0), (0, 0)) = 1_{L^*}$ als en slechts als er een stijgende, continue permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor alle x, y in L^* ,

$$\mathcal{S}(x, y) = (\varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1 - x_2) + \varphi(y_1), \varphi(1 - y_2) + \varphi(x_1))), 1 - \varphi^{-1}(\min(1, \varphi(1 - x_2) + \varphi(1 - y_2))))$$

of ook, gelet op Stelling 3.10 en Tabel 3.2, als en slechts als er een continue stijgende permutatie Φ van L^* bestaat zo dat Φ^{-1} stijgend is en zo dat, voor x, y in L^* ,

$$\mathcal{S}(x, y) = \Phi^{-1}(\mathcal{S}_W^n(\Phi(x), \Phi(y)))$$

$\mathcal{S}$ noemt men ook de Φ -getransformeerde van $\mathcal{S}_W^n$.

Wat betreft implicatoren op L^* kan de volgende veralgemening van de resultaten uit Voorbeeld 2.26 worden bereikt.

3.13 Stelling. [35] Voor implicatoren op L^* gelden de volgende resultaten m.b.t. de Smets–Magrez axioma's uit Tabel 2.3:

- Een R-implicator op L^* is steeds een randimplicator.
- Een implicator $\mathcal{I}$ op L^* is een modelimplicator a.s.a. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}}$ met involutieve $\mathcal{N}$.
- Een implicator $\mathcal{I}$ op L^* voldoet aan $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$ en (A.1) t.e.m. (A.6) a.s.a. er een stijgende, continue permutatie φ van $[0, 1]$ bestaat zo dat, voor alle x, y in L^* ,

$$\mathcal{I}(x, y) = (\varphi^{-1}(\min(1, 1 + \varphi(y_1) - \varphi(x_1), 1 + \varphi(1 - y_2) - \varphi(1 - x_2))), 1 - \varphi^{-1}(\min(1, 1 - \varphi(x_1) + \varphi(1 - y_2)))) \quad (3.5)$$

of ook, gelet op Stelling 3.10 en Tabel 3.4, als en slechts als er een continue stijgende permutatie Φ van L^* bestaat zo dat Φ^{-1} stijgend is en zo dat, voor alle x, y in L^* ,

$$\mathcal{I}(x, y) = \Phi^{-1}(\mathcal{I}_{T_W^n}(\Phi(x), \Phi(y)))$$

$\mathcal{I}$ noemt men de Φ -getransformeerde van $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^n}$, of ook een veralgemeende niet t-representeerbare Lukasiewicz implicator op L^* .

- Een implicator $\mathcal{I}$ op L^* voldoet aan $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$ en (A.1) t.e.m. (A.6) a.s.a. $\mathcal{I}$ een R-implicator is geïnduceerd door een continue, sterk nilpotente, archimedische t-norm $\mathcal{T}$ op L^* die voldoet aan de residueringsvoorwaarde (2.1), aan $\mathcal{T}(D, D) \subseteq D$ en aan $\mathcal{T}((0, 0), (0, 0)) = 0_{L^*}$.

Algebraïsch gezien is hiermee de kous af: het volledige wiskundig apparaat van de Smets–Magrez axioma's heeft de uitbreiding zonder kleerscheuren doorstaan²; het is t.z.t. ook een klinkende zege voor niet t-representeerbare connectieven, i.e. voor de Φ -getransformeerden van $\mathcal{T}_W^n$ en $\mathcal{S}_W^n$ en hun R- en S-implicatoren. Volgend voorbeeld zet dit nog eens extra in de verf.

3.14 Voorbeeld. Beschouw $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}$, de R-implicator van de t-representeerbare Lukasiewicz t-norm. Men gaat na dat $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}$ niet contrapositief is. Merk daartoe vooreerst op dat de geïnduceerde negator $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}}$, gegeven door, voor x in L^* ,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &= \mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}(x, 0_{L^*}) \\ &= (\min(1, 1 + 0 - x_1, 1 + x_2 - 1), \max(0, 1 - x_2)) \\ &= (x_2, 1 - x_2) \end{aligned}$$

niet involutief is. Zij dan bv. $x = (0.6, 0.4)$, $y = (0.5, 0.3)$. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}(x, y) &= (\min(1, 1 + 0.5 - 0.6, 1 + 0.4 - 0.3), \max(0, 0.3 - 0.4)) \\ &= (0.9, 0) \\ \mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}(\mathcal{N}(y), \mathcal{N}(x)) &= (\min(1, 1 + 0.4 - 0.3, 1 + 0.7 - 0.6), \max(0, 0.6 - 0.7)) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Dus (A.3) is niet voldaan. Beschouw vervolgens $\mathcal{I}_{\mathcal{S}_W^r}$, de S-implicator van de t-representeerbare Lukasiewicz t-conorm. Deze is wél contrapositief en de geïnduceerde negator is gelijk aan de standaardnegator $\mathcal{N}_s$, maar in tegenstelling tot $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^r}$ is er niet voldaan aan (A.5). Zij bv. $x = (0.2, 0.3)$, $y = (0.4, 0.1)$. Dan is $x \leq_{L^*} y$, doch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mathcal{S}_W^r}(x, y) &= (\min(1, 0.3 + 0.4), \max(0, 0.1 + 0.2 - 1)) \\ &= (0.7, 0) \end{aligned}$$

Het bovenstaande illustreert hoe $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^n}$ de wenselijke eigenschappen van zijn t-representeerbare tegenhangers handig combineert en t.z.t. de ontstane kloof tussen S- en R-implicatoren dicht.

²De enige wezenlijke open kwestie is of er implicatoren op L^* bestaan die voldoen aan (A.1) t.e.m. (A.6) en $\mathcal{I}(D, D) \not\subseteq D$; het is echter de vraag wat de zin zou zijn van dergelijke bewerking, die geen enkele implicator op $[0, 1]$ uitbreidt.

Richten we nu onze aandacht op geresidueerde tralies $(L, \leq_{L^*}, \mathcal{T})$. Hun bestaan wordt alvast verzekerd door Stelling 3.11. Meer algemeen geldt de volgende stelling.

3.15 Stelling. [53] Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* . Dan voldoet $\mathcal{T}$ aan de residueringsvoorwaarde (2.1) a.s.a.

$$\sup_{z \in Z} \mathcal{T}(x, z) = \mathcal{T}(x, \sup Z)$$

voor elke x in L^* en elke niet-ledige deelverzameling Z van L^* . Is i.h.b. $\mathcal{T}$ t-representeerbaar, dan is (2.1) voldaan a.s.a. $\mathcal{T}$ links-continu is.

In [53] werd het voorbeeld gegeven van een continue, niet t-representeerbare t-norm op L^* die niet voldoet aan de residueringsvoorwaarde (2.1). M.a.w., niet elke continue t-norm op L^* geeft aanleiding tot een geresidueerde tralie. Omgekeerd is in een geresidueerde tralie $(L, \leq_L, \mathcal{T})$, $\mathcal{T}$ wel steeds een links-continue t-norm op L^* .

Blijkbaar heeft de uitbreiding tot L^* ook voor gevolg dat het voldoen aan (A.1) t.e.m. (A.6) niet noodzakelijk het bestaan van een geassocieerde MV-algebra (cfr. Stelling 2.32) impliceert.

3.16 Voorbeeld. Beschouw de geresidueerde tralie $(L^*, \leq_{L^*}, \mathcal{T}_W^n)$, en zij $x = (0.1, 0.3), y = (0.2, 0.3)$. Dan is $x \leq_{L^*} y$. We tonen aan dat niet geldt: $(\exists z \in L^*)(\mathcal{T}_W^n(y, z) = x)$. Immers,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_W^n(y, z) &= (\max(0, 0.2 + z_1 - 1), \min(1, 0.3 + 1 - z_1, z_2 + 1 - 0.2)) \\ &= (\max(0, z_1 - 0.8), \min(1, 1.3 - z_1, z_2 + 0.8)) \end{aligned}$$

en dus moet $z_1 = 0.9$. Maar dan is $\min(1, 1.3 - 0.9, z_2 + 0.8) = 0.4 \neq 0.3$. Dus voldoet $\mathcal{T}_W^n$ niet aan de deelbaarheidseigenschap.

3.17 Stelling. Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* . De structuur $(L^*, \leq_{L^*}, \mathcal{T})$ is geen MV-algebra.

Bewijs. Gelet op Stelling 2.31 moet in een MV-algebra $(L^*, \leq_{L^*}, \mathcal{T})$ de negator $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ een Kleene-negator zijn, wat gezien Stelling 3.3 onmogelijk is. $\square$

3.2 Inclusiematen op L^*

Definitie 2.41 voorzagt reeds in een notie van inclusie voor L -vaagverzamelingen, die we hier instantiëren voor $L = L^*$, A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$:

$$A \subseteq B \iff (\forall u \in U)(A(u) \leq_{L^*} B(u)) \quad (3.6)$$

In de literatuur over IVs en IVWs (zie o.m. [6, 21]) wordt het “de facto” karakter van formule (3.6) uitgebreid in de verf gezet. Toch loont het de moeite, dieper in te gaan op de “deelverzameling van”-relatie. Daartoe zijn tenminste twee belangrijke redenen:

- Hoewel dit wordt geïmpliceerd door (3.6), hoeft het inclusiebegrip niet eenduidig te worden bepaald door de ordening $\leq_{L^*}$ op L^* om “zinnig” te zijn. In Sectie 3.2.1 motiveren we mogelijke alternatieven.
- De voorgestelde karakterisatie is *tweewaardig*: ofwel is A een deelverzameling van B , ofwel niet. Hoewel zowel met het oog op wiskundige bewijsvoering als naar de toepassingen toe het vaak volstaat om met ja of nee te antwoorden op de vraag of A een deelverzameling is van B , kan men een dergelijke strategie niet onterecht van zwart-wit denken beschuldigen: net zoals een element slechts tot een bepaalde graad tot een L^* -vaagverzameling kan behoren, willen we het ook soms kunnen hebben over L^* -vaagverzamelingen die “min of meer” een deelverzameling van elkaar vormen. Dit idee komt aan bod in Sectie 3.2.2.

3.2.1 Tweewaardige Alternatieven voor Klassieke Inclusie

Zoals we in het vorige hoofdstuk reeds lieten aanvoelen, is een belangrijke karakteristiek van IWVs en IVs *onbepaaldheid*: met elk element x in L^* stemt een waarde $1 - x_1 - x_2$ (of ook: de lengte van het interval $[x_1, 1 - x_2]$) overeen, die de mate weergeeft waarin het element x “afwijkt” van een element van D . We kunnen die onbepaaldheid ook visualiseren als een waaier aan wegen die we nog openlaten, aan mogelijke scenario’s die zich *kunnen* voordoen als de onbepaaldheid wordt weggewerkt.

Atanassov [4] bestudeerde dit fenomeen in het kader van IVs en gaf er een bijzondere interpretatie aan naar analogie met modale logica. Voor een element x in L^* definieerde hij de *necessiteit* $\Box x$ en de *possibiliteit* $\Diamond x$ als $\Box x = x_1$ en $\Diamond x = 1 - x_2$ (niet te verwarren met de gelijknamige begrippen uit de possibiliteitsleer zoals ingevoerd in Sectie 2.2.4). Bovendien introduceerde hij de uitgebreide modale operatoren D_α , α in $[0, 1]$, gegeven door $D_\alpha(x) = x_1 + \alpha(1 - x_1 - x_2)$, m.a.w. $D_\alpha(x)$ situeert zich tussen de beide uitersten $\Box x$ en $\Diamond x$ waarin de eliminatie van onbepaaldheid in x kan resulteren.

3.18 Voorbeeld. Voor $x = (0.2, 0.3)$ geldt $\Box x = 0.2$, $\Diamond x = 0.7$ en $D_\alpha(x) = 0.2 + 0.5\alpha$ waarbij α het interval $[0, 1]$ doorloopt.

De bewerkingen $\Box$, $\Diamond$ en D_α kunnen we bij uitbreiding ook laten inwerken op L^* -vaagverzamelingen. Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, α in $[0, 1]$, dan bepalen de volgende uitdrukkingen, voor u in U , drie vaagverzamelingen in U :

$$\begin{aligned} (\Box A)(u) &= \Box(A(u)) = \mu_A(u) \\ (\Diamond A)(u) &= \Diamond(A(u)) = 1 - \nu_A(u) \\ (D_\alpha A)(u) &= D_\alpha(A(u)) = \mu_A(u) + \alpha\nu_A(u) \end{aligned}$$

Op basis van deze begrippen stellen we een alternatieve notie van inclusie voor L^* -vaagverzamelingen voorop.

3.19 Definitie ((α, β)-inclusie). Zij A en B L^* -vaagverzamelingen in U , α, β in $[0, 1]$. A heet (α, β)-geïncludeerd in B , $A \subseteq_{\alpha, \beta} B$ genoteerd, als en slechts als $D_\alpha A \subseteq D_\beta B$, m.a.w.

$$A \subseteq_{\alpha, \beta} B \iff (\forall u \in U)(\mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \leq \mu_B(u) + \beta\pi_B(u))$$

Door A en B om te vormen tot vaagverzamelingen, herleiden we het inclusieprobleem voor L^* -vaagverzamelingen dus tot een eenvoudiger variant, waarbij de parameters α en β een gamma aan mogelijkheden toelaten tussen “extreem pessimisme” en “extreem optimisme” bij het elimineren van de onbepaaldheden; in het ene limietgeval ($\alpha = 1, \beta = 0$) beschouwt men de elementen als *maximaal behorend* tot A en *minimaal behorend* tot B , terwijl de parameterkeuze ($\alpha = 0, \beta = 1$) de duale, “optimistische” situatie voorstelt. Volgende stelling geeft de voornaamste eigenschappen van de (α, β)-inclusies.

3.20 Stelling. Zij A en B L^* -vaagverzamelingen in U .

1. Indien $(\forall u \in U)(A(u) \in D \text{ en } B(u) \in D)$, m.a.w. A en B zijn vaagverzamelingen in U , dan geldt

$$(\forall \alpha, \beta \in [0, 1])(A \subseteq_{\alpha, \beta} B \iff A \subseteq B)$$

Men zegt ook dat $\subseteq_{\alpha, \beta}$ een *getrouwe uitbreiding* is van de inclusie voor vaagverzamelingen.

2. $(\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta \in [0, 1])(A \subseteq_{\alpha_1, \beta} B \text{ en } \alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow A \subseteq_{\alpha_2, \beta} B)$;
 $(\forall \alpha, \beta_1, \beta_2 \in [0, 1])(A \subseteq_{\alpha, \beta_1} B \text{ en } \beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow A \subseteq_{\alpha, \beta_2} B)$
3. $(\forall \alpha, \beta \in [0, 1])(\alpha \leq \beta \Rightarrow (A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq_{\alpha, \beta} B))$
4. $A \subseteq_{1, 0} B \Rightarrow A \subseteq B$

Bewijs.

1. Zijn A en B vaagverzamelingen, dan geldt $\pi_A(u) = \pi_B(u) = 0$ voor elke u in U en dus uiteraard ook het gestelde.
2. Onmiddellijk uit de definitie van $\subseteq_{\alpha, \beta}$.
3. Zij $\alpha \leq \beta$, $A \subseteq B$ en beschouw u in U . Vermits $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ bestaat $\gamma, \gamma \geq 0$, zo dat $\mu_B(u) = \mu_A(u) + \gamma$. We vinden dan achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} & \mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \leq \mu_B(u) + \beta\pi_B(u) \\ \iff & \mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \leq \mu_A(u) + \gamma + \beta\pi_B(u) \\ \iff & \alpha(1 - \mu_A(u) - \nu_A(u)) \leq \gamma + \beta(1 - \mu_A(u) - \gamma - \nu_B(u)) \\ \iff & \alpha(1 - \mu_A(u) - \nu_A(u)) \leq \gamma(1 - \beta) + \beta(1 - \mu_A(u) - \nu_B(u)) \end{aligned}$$

De laatste formule is uiteraard geldig wanneer $A \subseteq B$.

4. Onderstel $A \subseteq_{1,0} B$ en beschouw u in U . Dan is $\mu_A(u) + \pi_A(u) \leq \mu_B(u)$, waaruit onmiddellijk $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ volgt. Bovendien geldt, aangezien $\mu_A(u) + \pi_A(u) = 1 - \nu_A(u)$ en $\mu_B(u) \leq 1 - \nu_B(u)$, ook dat $\nu_A(u) \geq \nu_B(u)$, dus $A \subseteq B$.

□

Wanneer $\alpha > \beta$ vindt men eenvoudig een tegenvoorbeeld voor de bewering $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq_{\alpha,\beta} B$. Stel bv. $A = B$, $\pi_A(u) \neq 0$ voor minstens één u in U , dan is $\mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \not\leq \mu_A(u) + \beta\pi_A(u)$.

3.21 Opmerking. (α, β) -inclusie voor $\alpha > \beta$ is derhalve niet reflexief; dit vormt evenwel geen probleem rekening houdend met de bijzondere semantiek, in termen van onbepaaldheid, die we eraan hebben toegekend.

Het volgende voorbeeld toont anderzijds aan dat uit $A \subseteq_{\alpha,\beta} B$, $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ in het algemeen niet volgt dat $A \subseteq B$.

3.22 Voorbeeld. Zij $\beta > 0$. Beschouw dan L^* -vaagverzamelingen A en B in $U = \{u\}$ zo dat $\mu_A(u) = \mu_B(u) + \frac{\beta}{2}\pi_B(u)$, $\pi_A(u) = 0$ en $\pi_B(u) > 0$. Dan is het duidelijk dat voor elke α in $[0, 1]$, $\mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \leq \mu_B(u) + \beta\pi_B(u)$, en dus $A \subseteq_{\alpha,\beta} B$ maar $\mu_A(u) > \mu_B(u)$ aangezien $\beta > 0$, en dus $A \not\subseteq B$.

Zij anderzijds $\beta = 0, \alpha < 1$ en beschouw L^* -vaagverzamelingen A en B in $\{u\}$ zo dat $\mu_B(u) = \mu_A(u) + \alpha\pi_A(u)$, $\pi_A(u) > 0$ en $\pi_B(u) = 0$. Dan is $\mu_A(u) + \alpha\pi_A(u) \leq \mu_B(u) + \beta\pi_B(u)$, en dus $A \subseteq_{\alpha,\beta} B$. Indien $A \subseteq B$ moet uiteraard ook $\nu_B(u) \leq \nu_A(u)$, hetzij

$$\begin{aligned}
 \nu_B(u) \leq \nu_A(u) &\iff 1 - \mu_A(u) - \alpha\pi_A(u) \leq \nu_A(u) \\
 &\iff 1 - \mu_A(u) - \alpha + \alpha\mu_A(u) + \alpha\nu_A(u) \leq \nu_A(u) \\
 &\iff (1 - \mu_A(u))(1 - \alpha) \leq \nu_A(u)(1 - \alpha) \\
 &\iff 1 - \mu_A(u) \leq \nu_A(u)
 \end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid geldt enkel indien $\pi_A(u) = 0$, in strijd met de veronderstelling, en dus $A \not\subseteq B$.

3.2.2 Meerwaardige Alternatieven voor Klassieke Inclusie

In heel wat publicaties (zie o.m. [9, 21, 40, 42, 70, 89, 93, 115, 140]) bestudeert men *vaaginclusiematen*, dit zijn operatoren INC die uit een koppel (A, B) van vaagverzamelingen een graad $INC(A, B)$ in $[0, 1]$ van inclusie van A in B distilleren. De waarde 1 staat daarbij voor “perfecte” inclusie van A in B , terwijl 0 betekent dat A in het geheel geen deelverzameling is van B .

Typerend voor deze aanpakken is dat ze vertrekken van een welbepaalde karakterisatie van het scherpe inclusiebegrip, waarbij operaties op vaagverzamelingen de plaats innemen van corresponderende scherpe bewerkingen. Zo vormen de onderstaande formules twee verschillende, maar equivalente³ uitdrukkingen

³Althans voor eindige universa. Doorheen deze sectie gaan we er van uit dat U een eindig, niet-ledig universum is.

van het feit dat A een deelverzameling is van B , A, B in $\mathcal{P}(U)$:

$$A \subseteq B \iff (\forall u \in U)(u \in A \Rightarrow u \in B), \quad (3.7)$$

$$\iff A = \emptyset \text{ of } \frac{|A \cap B|}{|A|} = 1, \quad (3.8)$$

waarbij $|A|$ de kardinaliteit van A voorstelt. Terwijl (3.7) een karakterisatie in zuiver logische termen geeft, is de tweede formule gebaseerd op het tellen van de elementen van een verzameling, en heeft derhalve een probabilistisch tintje. Het valt dan ook niet te verwonderen dat bij de uitbreiding naar vaagverzamelingen-leer beide formules hun eigen weg opgaan. Zonder hier reeds in details te willen treden zouden we kunnen stellen dat aanhangers van elk van beide scherpe definities vaaginclusie op twee verschillende sporen hebben gezet. De ene traditie is logisch-gebaseerd, de andere verzamelinggebaseerd. Dit komt het duidelijkst aan het licht wanneer men vaaginclusiematen probeert te karakteriseren en in te delen door hen bepaalde “wenselijke” eigenschappen op te leggen, zoals verschillende auteurs hebben getracht. Rond volgende eigenschap bijvoorbeeld laaien geregeld de gemoederen hoog op (zie bv. [140]):

$$A, B \in \mathcal{P}(U) \Rightarrow INC(A, B) \in \{0, 1\} \quad (3.9)$$

Kitainik [89] heeft het over *erfchap* (heritage). In wat volgt zullen we o.m. zien dat de keuze om (3.9) in de definitie van een inclusiemaat op te nemen, ons nagenoeg dwingt tot de logisch-gebaseerde aanpak, weliswaar met de deur op een kier voor zinnige trade-offs.

Uitgaande van de kennis over vaaginclusiematen die in de literatuur voorhanden is, zullen we in de volgende paragrafen logisch-gebaseerde en verzamelinggebaseerde aanpakken tot de constructie van inclusiemaaten op L^* uit de doeken doen. We onderscheiden daarbij *directe* van *indirecte* methodes.

3.23 Opmerking. Vermelden we ook dat Bustince in [21] reeds een schetsmatige aanzet gaf tot de behandeling van het inclusievraagstuk voor IWVs (en dus voor L^* -vaagverzamelingen). Anderzijds werd door De Baets in [42] een exposé in termen van algemene L -vaagverzamelingen gevoerd. We zullen niet nalaten waar nodig onze bevindingen aan deze bronnen te relateren.

Directe, Logisch-Gebaseerde Aanpak

Zoals reeds aangehaald is een handige methode om inclusiemaaten te bekomen uit te gaan van een reeks eigenschappen van de scherpe inclusie en vervolgens na te gaan welke operaties voldoen aan de gestelde eisen. Sinha en Dougherty [115], en onafhankelijk van hen, Kitainik [89], volgden deze strategie voor vaaginclusiematen. In [40] werden beide aanpakken aan elkaar gekoppeld, wat resulteert in de volgende stelling.

3.24 Stelling. Zij INC een $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ afbeelding. Dan voldoet INC aan de eigenschappen, voor vaagverzamelingen A, B en C in U , en voor een welbepaalde involutieve negator N op $[0, 1]$,

1. $INC(A, B) = Inc(co_N(B), co_N(A))$
2. $INC(A, B \cap C) = \min(INC(A, B), INC(A, C))$
3. $INC(A, B) = INC(S(A), S(B))$
 met S een $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ afbeelding gedefinieerd door, voor u in U ,
 $S(A)(u) = A(s(u))$, s een willekeurige permutatie van U .
4. $INC(A, B) = 1 \iff A \subseteq B$
 $INC(A, B) = 0 \iff (\exists u \in U)(A(u) = 1 \text{ en } B(u) = 0)$

a.s.a. er een implicator I op $[0,1]$ bestaat zo dat $N = N_I$ en zo dat I voldoet aan (A.3), (A.5) en aan $(\forall x, y \in [0, 1])(x = 1 \text{ en } y = 0 \iff I(x, y) = 0)$, zo dat

$$INC(A, B) = \inf_{u \in U} I(A(u), B(u))$$

3.25 Opmerking. Hoewel dit noch bij Sinha en Dougherty, noch bij Kitainik uitdrukkelijk wordt vermeld, verwijst het verschijnen van het infimum (cfr. $\forall$) en de implicator (cfr. $\Rightarrow$) in bovenstaande stelling ondubbelzinnig naar formule (3.7), en dus naar de logisch-gebaseerde traditie. Men gaat ook na dat de erfscapseigenschap (3.9) onder de voorwaarden van de stelling is voldaan.

Een vraag die zich opdringt is: wat voor een afbeelding moet een inclusie-maat INC op L^* zijn? De invoerwaarden zijn L^* -vaagverzamelingen, maar wat voor een waarde geeft INC terug? De voor de hand liggende keuze lijkt om een waarde uit $[0,1]$ te nemen; het volgende voorbeeld laat zien dat die aanpak tot ongewenste resultaten kan leiden.

3.26 Voorbeeld. Zij A, B L^* -vaagverzamelingen in $U = \{u_1, u_2\}$, zo dat $A(u_1) = 1_{L^*}$, $B(u_1) = (0, 0)$, $A(u_2) = (0, 0)$, $B(u_2) = 0_{L^*}$. Het is duidelijk dat $A \not\subseteq B$. Echter, omwille van de onbepaaldheid van u_1 m.b.t. B en van u_2 m.b.t. A , is er geen aanwijzing dat A in het geheel geen deelverzameling is van B , noch dat A een deelverzameling van B zou zijn in een bepaalde mate α in $[0, 1]$: A zou weliswaar tot op zekere hoogte een deelverzameling van B kunnen zijn, maar de maximale onbepaaldheid laat niet toe de knoop door te hakken. In die zin zou het te beperkend zijn om $INC(A, B)$ enkel waarden in $[0, 1]$ te laten aannemen, en is het element $(0, 0)$ uit L^* een natuurlijker manier om de inclusie van A in B weer te geven. We laten het dus dezelfde rol van volledige onbepaaldheid spelen als bij de bepaling van lidmaatschap en niet-lidmaatschap in een IV.

Het voorbeeld suggereert dat INC dus een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding zou zijn. Het stelt t.z.t. ook een criterium voor inclusiematen op L^* zonder analogon in de vaagverzamelingenleer voor, namelijk: dat $INC(A, B) = (0, 0)$ als A en B zoals in Voorbeeld 3.26 zijn gegeven.

In Tabel 3.5 stellen we een (directe) uitbreiding voor van de gewenste eigenschappen uit Stelling 3.24. S is daarbij een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{L^*}(U)$ afbeelding

(I.1)	$\mathcal{INC}(A, B) = \mathcal{INC}(co_{\mathcal{N}}(B), co_{\mathcal{N}}(A))$	(contrapositiviteit)
(I.2)	$\mathcal{INC}(A, B \cap C) = \inf(\mathcal{INC}(A, B), \mathcal{INC}(A, C))$	(distributiviteit)
(I.3)	$\mathcal{INC}(A, B) = \mathcal{INC}(S(A), S(B))$	(symmetrie)
(I.4)	a) $\mathcal{INC}(A, B) = 1_{L^*} \iff A \subseteq B$	(getrouwheid)
	b) $\mathcal{INC}(A, B) = 0_{L^*} \iff (\exists u \in U)(A(u) = 1_{L^*} \text{ en } B(u) = 0_{L^*})$	
	c) $A, B \in \mathcal{F}(U) \Rightarrow \mathcal{INC}(A, B) \in D$	

Tabel 3.5: Axioma's voor een logisch-gebaseerde inclusiemaat $\mathcal{INC}$ op L^* ; A, B, C in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, $\mathcal{N}$ is een welbepaalde involutieve negator op L^* .

gedefinieerd door, voor u in U , $S(A)(u) = A(s(u))$, met s een willekeurige permutatie van U . Het doel is nu een karakterisatie te geven van de afbeeldingen die aan alle axioma's voldoen.

Laat ons eerst de volgende klasse $\mathcal{INC}_{\mathcal{I}}$ van $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeeldingen, $\mathcal{I}$ een implicator op L^* , definiëren als, voor L^* -vaagverzamelingen A en B in U ,

$$\mathcal{INC}_{\mathcal{I}}(A, B) = \inf_{u \in U} \mathcal{I}(A(u), B(u)) \quad (3.10)$$

Met het oog op de bewijsvoering definiëren we voorts de volgende afbeeldingen χ_{Ω} en $\alpha\chi_{\Omega}$ (Ω in $\mathcal{P}(U)$, α in L^*), voor u in U :

$$\chi_{\Omega}(u) = \begin{cases} 1_{L^*} & \text{als } u \text{ in } \Omega \\ 0_{L^*} & \text{anders} \end{cases} \quad \alpha\chi_{\Omega}(u) = \begin{cases} \alpha & \text{als } u \text{ in } \Omega \\ 0_{L^*} & \text{anders} \end{cases}$$

Het is onmiddellijk duidelijk dat voor de afbeelding χ_{Ω} , die uiteraard ook op te vatten is als de lidmaatschapsfunctie van de scherpe verzameling Ω , geldt: $\chi_{\Omega} = 1_{L^*}\chi_{\Omega}$. De afbeeldingen $\alpha\chi_{\Omega}$ laten volgende “decomposities” a.d.h.v. van L^* -vaagverzamelingen A en B in U toe.

3.27 Hulpstelling. Zij $\mathcal{N}$ een involutieve negator op L^* , A, B in $\mathcal{F}(U)$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{u \in U} A(u)\chi_{\{u\}} \\ B &= \bigcap_{u \in U} co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}}) \end{aligned}$$

Bewijs. We tonen de decompositie van B aan. Zij daartoe u^* in U . We vinden achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{u \in U} co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}}) \right) (u^*) &= \inf_{u \in U} \mathcal{N}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}}(u^*)) \\ &= \mathcal{N}(\mathcal{N}(B(u^*))) \\ &= B(u^*) \end{aligned}$$

De decompositie van A verloopt volledig analoog. $\square$

3.28 Hulpstelling. Zij $\mathcal{INC}$ een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding die voldoet aan (I.1) t.e.m. (I.4), A, B, C in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$. Dan geldt:

1. $\mathcal{INC}(A \cup B, C) = \inf(\mathcal{INC}(A, C), \mathcal{INC}(B, C))$
2. $\mathcal{INC}$ is dalend in het eerste, en stijgend in het tweede argument.

Bewijs.

1. Wegens (I.1), (I.2) en de wetten van de Morgan geldt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{INC}(A \cup B, C) &= \mathcal{INC}(co_{\mathcal{N}}(C), co_{\mathcal{N}}(A \cup B)) \\
 &= \mathcal{INC}(co_{\mathcal{N}}(C), co_{\mathcal{N}}(A) \cap co_{\mathcal{N}}(B)) \\
 &= \inf(\mathcal{INC}(co_{\mathcal{N}}(C), co_{\mathcal{N}}(A)), \mathcal{INC}(co_{\mathcal{N}}(C), co_{\mathcal{N}}(B))) \\
 &= \inf(\mathcal{INC}(A, C), \mathcal{INC}(B, C))
 \end{aligned}$$

2. Zij $A \subseteq B$. Dan geldt, gelet op 1.,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{INC}(B, C) &= \mathcal{INC}(A \cup B, C) \\
 &= \inf(\mathcal{INC}(A, C), \mathcal{INC}(B, C)) \\
 &\leq_{L^*} \mathcal{INC}(A, C)
 \end{aligned}$$

en dus is $\mathcal{INC}$ dalend in het eerste argument. Wegens (I.2) is $\mathcal{INC}$ stijgend in het tweede argument. $\square$

3.29 Hulpstelling. Zij $\mathcal{INC}$ een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding die voldoet aan (I.1) t.e.m. (I.4), A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$. Dan geldt:

$$\mathcal{INC}(A, B) = \inf_{u \in U} \mathcal{INC}(A(u)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}}))$$

Bewijs. Dankzij Hulpstelling 3.27 kunnen we A en B herschrijven als

$$\begin{aligned}
 A &= \bigcup_{u \in U} A(u)\chi_{\{u\}} \\
 B &= \bigcap_{u \in U} co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}})
 \end{aligned}$$

Wegens Hulpstelling 3.28, punt 1, en eigenschap (I.2) geldt

$$\mathcal{INC}(A, B) = \inf_{u, v \in U} \mathcal{INC}(A(u)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(v))\chi_{\{v\}})) \quad (3.12)$$

Als $u \neq v$ in (3.12) dan geldt $\mathcal{INC}(A(u)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(v))\chi_{\{v\}})) = 1_{L^*}$. Inderdaad, gebruik makend van Hulpstelling 3.28, punt 2, en eigenschap (I.4)a vinden we:

$$\begin{aligned} \mathcal{INC}(A(u)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(v))\chi_{\{v\}})) &\geq_{L^*} \mathcal{INC}(\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(v))\chi_{\{v\}})) \\ &= \mathcal{INC}(\chi_{\{u\}}, \chi_{co(\{v\})} \cup B(v)\chi_{\{v\}}) \\ &\geq_{L^*} \mathcal{INC}(\chi_{\{u\}}, \chi_{co(\{v\})}) \\ &= 1_{L^*} \end{aligned}$$

Dus, $\mathcal{INC}(A, B) = \inf_{u \in U} \mathcal{INC}(A(u)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(B(u))\chi_{\{u\}}))$. $\square$

3.30 Stelling. Een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding $\mathcal{INC}$ voldoet aan (I.1) t.e.m. (I.4) als en slechts als $\mathcal{INC} = \mathcal{INC}_{\mathcal{I}}$ met $\mathcal{I}$ een implicator op L^* waarvoor $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ en die voldoet aan $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$, aan (A.3), (A.5) alsook aan

$$(\forall x, y, z \in L^*)(\mathcal{I}(x, \inf(y, z)) = \inf(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z))) \quad (3.13)$$

$$(\forall x, y \in L^*)(x = 1_{L^*} \text{ en } y = 0_{L^*} \iff \mathcal{I}(x, y) = 0_{L^*}) \quad (3.14)$$

Bewijs.

- Enerzijds, zij $\mathcal{I}$ een implicator op L^* die aan de gestelde voorwaarden voldoet. We moeten aantonen dat $\mathcal{INC}_{\mathcal{I}}$ voldoet aan (I.1) t.e.m. (I.4), met $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$. De contrapositiviteit (I.1) van $\mathcal{INC}_{\mathcal{I}}$ volgt onmiddellijk uit de contrapositiviteit (A.3) van $\mathcal{I}$. Analoog volgt uit (3.13) eigenschap (I.2); (I.3) geldt aangezien $\inf_{u \in U}$ invariant is onder een permutatie van U . De getrouwheidsvoorwaarden (I.4) kunnen als volgt bewezen worden:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff (\forall u \in U)(A(u) \leq_{L^*} B(u)) \\ &\iff (\forall u \in U)(\mathcal{I}(A(u), B(u)) = 1_{L^*}) \\ &\iff \inf_{u \in U} \mathcal{I}(A(u), B(u)) = 1_{L^*} \\ &\iff \mathcal{INC}_{\mathcal{I}}(A, B) = 1_{L^*} \end{aligned}$$

gelet op (A.5), en

$$\begin{aligned} &(\exists u \in U)(A(u) = 1_{L^*} \text{ en } B(u) = 0_{L^*}) \\ &\iff (\exists u \in U)(\mathcal{I}(A(u), B(u)) = 0_{L^*}) \\ &\iff \inf_{u \in U} \mathcal{I}(A(u), B(u)) = 0_{L^*} \\ &\iff \mathcal{INC}_{\mathcal{I}}(A, B) = 0_{L^*} \end{aligned}$$

Om de voorlaatste overgang te rechtvaardigen dient beroep gedaan op de eindigheid van U . $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$ is voldoende voor de laatste getrouwheidsvoorwaarde, i.e. $\mathcal{INC}_{\mathcal{I}}(A, B) \in D$ wanneer A en B vaagverzamelingen zijn.

- Anderzijds, onderstel dat $\mathcal{INC}$ voldoet aan (I.1) t.e.m. (I.4) voor welbepaalde involutieve negator $\mathcal{N}$ op L^* . Definieer een $(L^*)^2 \rightarrow L^*$ afbeelding $\mathcal{I}$, als, voor α, β in L^* ,

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta) = \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}}))$$

$\mathcal{I}$ is goed gedefinieerd, aangezien door (I.3) de keuze van u in U er niet toe doet. Wegens Hulpstelling 3.29 is het voldoende te bewijzen dat $\mathcal{I}$ een implicator op L^* is waarvoor $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ en die voldoet aan de vooropgestelde voorwaarden.

- $\mathcal{I}$ is een implicator op L^* . Om aan te tonen dat $\mathcal{I}$ dalend is in het eerste argument, kies α_1, α_2 in L^* zo dat $\alpha_1 \leq_{L^*} \alpha_2$. Dan is $\alpha_1\chi_{\{u\}} \subseteq \alpha_2\chi_{\{u\}}$, en dus vinden we wegens Hulpstelling 3.28, punt 1, dat $\mathcal{I}(\alpha_1, \beta) \geq_{L^*} \mathcal{I}(\alpha_2, \beta)$. Analoog is $\mathcal{I}$ stijgend in het tweede argument. De randvoorwaarden zijn eveneens voldaan, bv. $\mathcal{I}(1_{L^*}, 0_{L^*}) = \mathcal{INC}(1_{L^*}\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(0_{L^*})\chi_{\{u\}})) = \mathcal{INC}(\chi_{\{u\}}, \chi_{co_{\mathcal{N}}(\{u\})}) = 0_{L^*}$ wegens de getrouwheid (I.4)b) van $\mathcal{INC}$.
- $\mathcal{I}$ voldoet aan $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$, (A.3), (A.5), (3.13) en (3.14). Zij α, β, γ in L^* . Uit (I.1), (I.2) en de getrouwheid van $\mathcal{INC}$ volgt achtereenvolgens:

$$\mathcal{I}(D, D) \subseteq D.$$

$$\alpha, \beta \in D \Rightarrow \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}})) = \mathcal{I}(\alpha, \beta) \in D$$

(A.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathcal{N}(\beta), \mathcal{N}(\alpha)) &= \mathcal{INC}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\mathcal{N}(\alpha))\chi_{\{u\}})) \\ &= \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}})) \\ &= \mathcal{I}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

Dat $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$ volgt uit het eenvoudig te verifiëren feit dat $\mathcal{I}$ enkel contrapositief kan zijn t.o.v. $\mathcal{N}_{\mathcal{I}}$.

(A.5)

$$\begin{aligned} \alpha \leq_{L^*} \beta &\iff \alpha\chi_{\{u\}} \subseteq \beta\chi_{\{u\}} \\ &\iff \alpha\chi_{\{u\}} \subseteq co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}}) \\ &\iff \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}})) = 1_{L^*} \\ &\iff \mathcal{I}(\alpha, \beta) = 1_{L^*} \end{aligned}$$

(3.13)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\alpha, \inf(\beta, \gamma)) &= \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\inf(\beta, \gamma))\chi_{\{u\}})) \\ &= \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\sup(\mathcal{N}(\beta), \mathcal{N}(\gamma))\chi_{\{u\}})) \\ &= \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}}) \\ &\quad \cap co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\gamma)\chi_{\{u\}})) \\ &= \inf(\mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}})), \\ &\quad \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\gamma)\chi_{\{u\}}))) \\ &= \inf(\mathcal{I}(\alpha, \beta), \mathcal{I}(\alpha, \gamma)) \end{aligned}$$

(3.14)

$$\begin{aligned} \alpha = 1_{L^*} \text{ en } \beta = 0_{L^*} &\iff \mathcal{INC}(\alpha\chi_{\{u\}}, co_{\mathcal{N}}(\mathcal{N}(\beta)\chi_{\{u\}})) = 0_{L^*} \\ &\iff \mathcal{I}(\alpha, \beta) = 0_{L^*} \end{aligned}$$

□

3.31 Opmerking. Bovenstaand resultaat kan gemakkelijk worden uitgebreid naar algemene L -vaagverzamelingen; men dient er gelet op de gevoerde redenering enkel over te waken dat de involutieve negator $\mathcal{N}$ op L voldoet aan de wetten van de Morgan, wat voor een distributieve begrensde tralie steeds is vervuld. In die zin vormt Stelling 3.30 een uitbreiding op [42], waarin *voldoende* voorwaarden voor het voldoen aan (veralgemeende versies van) de axioma's (I.1) t.e.m. (I.3), (I.4)a) en (I.4)b) worden afgeleid. Ons resultaat toont namelijk ook de noodigheid van de voorwaarden aan.

Het verdient de aandacht dat om in overeenstemming te zijn met de voorwaarde gesteld in Voorbeeld 3.26, $\mathcal{I}$ ook moet voldoen aan (A.2). Zeer weinig kandidaat-implicatoren vervullen alle criteria; i.h.b. komen geen t -representeerbare exemplaren in aanmerking, daar in [35] werd bewezen dat t -representeerbare S -implicatoren op L^* niet t.z.t. aan (A.3) en (A.5) kunnen voldoen, en dat t -representeerbare R -implicatoren op L^* niet contrapositief zijn (cfr. Voorbeeld 3.14). Ons enige aanknopingspunt is daarom Stelling 3.13 die alle continue implicatoren karakteriseert die aan de gestelde voorwaarden⁴ en aan (A.4) voldoen, m.a.w. de Φ -getransformeerden van $\mathcal{I}_W^n$.

3.32 Opmerking. In [21], waarin Bustince eveneens L^* -inclusiematen $\mathcal{INC}$ bestudeert, wordt uitgegaan van de axioma's (I.1), (I.3), (I.4), aangevuld met enkele redundante voorwaarden. Vertaald naar onze notaties⁵ luidt zijn bevinding dat de genoemde criteria voldaan zijn indien $\mathcal{INC}$ gekozen wordt als, voor A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$,

$$\mathcal{INC}(A, B) = \inf_{u \in U} \mathcal{I}_\varphi(A(u), B(u))$$

waarbij $\mathcal{I}_\varphi$, met φ een continue, stijgende permutatie van $[0, 1]$, x, y in L^* , bepaald wordt door

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varphi(x, y) &= (\min(1, 1 - \varphi(x_1) + \varphi(y_1), 1 + \varphi(1 - y_2) - \varphi(1 - x_2)), \\ &\quad \max(0, \min(\varphi(x_1) - \varphi(y_1), \varphi(1 - x_2) - \varphi(1 - y_2)))) \end{aligned}$$

Men gaat na dat $\mathcal{I}_\varphi$ voldoet aan (A.1), (A.3), (A.5), (3.14) en aan $\mathcal{I}(D, D) \subseteq D$. Het is bovendien een niet t -representeerbare extensie van de Łukasiewicz implicator op $[0, 1]$. Aangezien voor x in L^* geldt dat

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\varphi(1_{L^*}, x) &= (\min(1, \varphi(x_1), \varphi(1 - x_2)), \\ &\quad \max(0, \min(1 - \varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2)))) \\ &= (\varphi(x_1), 1 - \varphi(1 - x_2)) \end{aligned}$$

⁴Men verifieert eenvoudig dat aan (3.13) en (3.14) is voldaan door deze voorwaarden in te vullen in de uitdrukking (3.5).

⁵We merken op dat in [21] zelfs niet over een implicator op L^* gesproken wordt, zodat het bereikte resultaat er in feite een beetje uit de lucht komt vallen.

is echter niet voldaan aan (A.2) zodra $\varphi(x) \neq x$ voor een bepaalde x in L^* . Een ernstiger tekort van de implicatoren $\mathcal{I}_\varphi$ is dat ze niet voldoen aan (3.13); inderdaad, men gaat bv. na dat in het bijzondere geval waarin $\varphi(x) = x$, voor elke x in L^* , met de keuze $x = (0.2, 0)$, $y = (0, 0.1)$ en $z = (0.3, 0.7)$ geldt

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\varphi(x, \inf(y, z)) &= \mathcal{I}_\varphi((0.2, 0), (0, 0.7)) = (0.3, 0.2) \\ \inf(\mathcal{I}_\varphi(x, y), \mathcal{I}_\varphi(x, z)) &= \inf((0.8, 0.1), (0.3, 0)) = (0.3, 0.1)\end{aligned}$$

wat meteen verklaart waarom Bustince (I.2) niet opneemt in de voorwaarden voor $\mathcal{INC}$. Het weze duidelijk dat ons resultaat deze tekortkomingen ongedaan maakt.

Indirecte, Logisch–Gebaseerde Aanpak

We benaderen het inclusievraagstuk voor L^* –vaagverzamelingen nu vanuit een andere hoek. Zoals we reeds zagen, geven de uitgebreide modale operatoren D_α voor L^* –vaagverzamelingen A en B aanleiding tot koppels van vaagverzamelingen $(D_\alpha A, D_\beta B)$ voor elke (α, β) in $[0, 1]^2$. Op die koppels zijn uiteraard vaaginclusiematen van toepassing, zodat we uitgaande van een geschikte $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ afbeelding Inc de volgende verzameling kunnen beschouwen:

$$\{Inc(D_\alpha A, D_\beta B) \mid 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$$

3.33 Stelling. Zij Inc een $\mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ die dalend in het eerste, en stijgend in het tweede argument is. Dan geldt, voor L^* –vaagverzamelingen A en B in U , en voor willekeurige α, β in $[0, 1]$,

$$Inc(\Diamond A, \Box B) \leq Inc(D_\alpha A, D_\beta B) \leq Inc(\Box A, \Diamond B)$$

Bewijs. Onmiddellijk wegens Stelling 3.20, en het feit dat $\Box A = D_0 A$ en $\Diamond A = D_1 A$. $\square$

Een handige manier om de beschikbare informatie omtrent A en B (i.h.b. omtrent alle situaties die voortkomen uit het elimineren van hun onbepaaldheden) samen te bundelen bestaat er daarom in, een afbeelding $\mathcal{INC}$ te definiëren als, voor A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, $\mathcal{INC}(A, B) = [Inc(\Diamond A, \Box B), Inc(\Box A, \Diamond B)]$. Dit interval in $[0, 1]$ kunnen we gebruikmakend van Stelling 2.50 herschrijven als

$$\mathcal{INC}(A, B) = (Inc(\Diamond A, \Box B), 1 - Inc(\Box A, \Diamond B))$$

waarbij $\mathcal{INC}$ dus een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding is.

3.34 Voorbeeld. Zij S een t-conorm op $[0, 1]$. Beschouw dan de volgende afbeelding INC , voor A en B vaagverzamelingen in U :

$$INC(A, B) = \inf_{u \in U} I_{S, N_s}(A(u), B(u)) = \inf_{u \in U} S(1 - A(u), B(u))$$

We gaan de gedaante van de geïnduceerde maat $\mathcal{INC}$ na; A en B zijn nu L^* -vaagverzamelingen in U . T stelt daarbij de duale t-norm van S t.o.v. N_s voor, en $\mathcal{S}$ is de t-representeerbare t-conorm op L^* met representanten S en T .

$$\begin{aligned}
\mathcal{INC}(A, B) &= (\mathcal{INC}(\Diamond A, \Box B), 1 - \mathcal{INC}(\Box A, \Diamond B)) \\
&= \left(\inf_{u \in U} S(1 - (\Diamond A)(u), (\Box B)(u)), \right. \\
&\quad \left. 1 - \inf_{u \in U} S(1 - (\Box A)(u), (\Diamond B)(u)) \right) \\
&= \left(\inf_{u \in U} S(\nu_A(u), \mu_B(u)), \sup_{u \in U} 1 - S(1 - \mu_A(u), 1 - \nu_B(u)) \right) \\
&= \left(\inf_{u \in U} S(\nu_A(u), \mu_B(u)), \sup_{u \in U} T(\mu_A(u), \nu_B(u)) \right) \\
&= \inf_{u \in U} (S(\nu_A(u), \mu_B(u)), T(\mu_A(u), \nu_B(u))) \\
&= \inf_{u \in U} \mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}_s}(A(u), B(u)) \\
&= \mathcal{INC}_{\mathcal{I}_{\mathcal{S}, \mathcal{N}_s}}(A, B)
\end{aligned}$$

Kiezen we $S = S_W$, dan voldoet $\mathcal{INC}$ i.h.b. aan de voorwaarden van Stelling 3.24 en is dus een geschikte logisch-gebaseerde vaaginclusiemaat. We kunnen in dat geval ook nagaan dat $A \subseteq_{1,0} B \iff \mathcal{INC}(A, B) = \mathcal{INC}_{\mathcal{I}_{S_W^r}}(A, B) = 1_{L^*}$. Dus, $\mathcal{INC}$ breidt de tweewaardige inclusiemaat $\subseteq_{1,0}$ uit in plaats van het “klassieke” voorstel (3.6).

3.35 Opmerking. Bovenstaand voorbeeld dwingt ons stil te staan bij de rol van t-representeerbaarheid, hier i.h.b. bij S-implicatoren op L^* . Men gaat o.m. eenvoudig na dat, voor alle x, y in L^* , $\mathcal{I}_{S_W^r}(x, y) \leq_{L^*} \mathcal{I}_{S_W^r}^n(x, y)$, en dat $\mathcal{I}_{S_W^r}^n(x, y)$ slechts gelijk is aan 1_{L^*} indien $\Diamond x \leq \Box y$, dus in alle scenario's waarin de eliminatie van onbepaaldheid resulteert, wat een stricter eis is dan $x \leq_{L^*} y$. Evenwel bepaalt de relatie R op L^* gedefinieerd als $(x, y) \in R \iff \Diamond x \leq \Box y$ geen orderrelatie op L^* , daar ze niet reflexief is. *De voorgestelde indirecte aanpak bewerkstelligt dus een afwijking van de L-vaagverzamelingenleer, daar de gebruikte “ordering” de traliestructuur op L^* verbreekt.* In concrete toepassingen kunnen beide opties evenwel als zinvolle alternatieven worden aangeboden.

Verzamelinggebaseerde Aanpak

Richten we onze aandacht opnieuw op de erfschapseigenschap (3.9). Young maakt in [140] de volgende bedenking: wanneer twee vaagverzamelingen A en B in U overal dezelfde waarde hebben, behalve in het element u waarvoor $A(u) = 1$ en $B(u) = 0$, dan dwingt (3.9) dat $\mathcal{INC}(A, B) = 0$. Men kan zich concrete situaties inbeelden waarin dit inderdaad bij de haren getrokken lijkt; stel bv. dat we moeten nagaan in welke mate de jonge werknemers in een bedrijf ook welgesteld zijn (m.a.w. in welke mate geldt “jonge werknemers $\subseteq$ welgestelde werknemers”?). Het ligt dan voor de hand om een dergelijke evaluatie te baseren

op de relatieve fractie (i.e. de frequentie) van goede verdieners onder de jongeren. Deze observatie heeft onderzoekers ertoe geleid uitbreidingen te bestuderen van de formule (3.8) van het begrip kardinaliteit van een verzameling.

3.36 Definitie (Kardinaliteit van een L^* -vaagverzameling). [120] Zij A een L^* -vaagverzameling in U . De kardinaliteit van A is dan het interval $[\min \Sigma Count(A), \max \Sigma Count(A)]$, waarvoor

$$\begin{aligned} \min \Sigma Count(A) &= \sum_{u \in U} \mu_A(u) = \sum_{u \in U} (\Box A)(u) \\ \max \Sigma Count(A) &= \sum_{u \in U} \mu_A(u) + \pi_A(u) = \sum_{u \in U} (\Diamond A)(u) \end{aligned}$$

Is A een vaagverzameling in U , dan geldt $\min \Sigma Count(A) = \max \Sigma Count(A)$; we schrijven verkort $|A| = \min \Sigma Count(A)$. Gebruik makend van een t -norm T op $[0,1]$ kan men de vaaginclusiemaat INC_T definiëren door, voor A, B in $\mathcal{F}(U)$,

$$INC_T(A, B) = \begin{cases} \frac{|A \cap_T B|}{|A|} & \text{als } A \neq \emptyset \\ 1 & \text{als } A = \emptyset \end{cases} \quad (3.18)$$

3.37 Opmerking. Bovenstaande formule noemt men soms ook de *relatieve kardinaliteit van B gegeven A* . [95] Ze vertoont eveneens een sterke gelijkenis met het begrip voorwaardelijke waarschijnlijkheid uit de probabiliteitstheorie. Zoals we in Hoofdstuk 6 zullen zien speelt deze probabilistisch getinte maat o.m. een belangrijke rol bij het ontginnen van (vaag)associatieregels uit grote datavolumes.

Aangezien de kardinaliteit van een L^* -vaagverzameling in het algemeen een interval van positieve reële waarden is, en de deling van intervallen in $[0,1]$ geen inwendige bewerking is, is er echter geen rechttoe rechtaan uitbreiding tot L^* mogelijk van formule (3.18). De indirecte aanpak zoals uiteengezet in de vorige paragraaf levert ons wel een uitweg. Zij A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, dan bepaalt de uitdrukking

$$INC_T(A, B) = \begin{cases} \left(\frac{|\Diamond A \cap_T \Box B|}{|\Diamond A|}, 1 - \frac{|\Box A \cap_T \Diamond B|}{|\Box A|} \right) & \text{als } \Box A \neq \emptyset \\ \left(\frac{|\Diamond A \cap_T \Box B|}{|\Diamond A|}, 0 \right) & \text{als } \Diamond A \neq \emptyset = \Box A \\ 1_{L^*} & \text{als } A = \emptyset \end{cases} \quad (3.19)$$

een $\mathcal{F}_{L^*}(U) \times \mathcal{F}_{L^*}(U) \rightarrow L^*$ afbeelding die voldoet aan (I.3) en aan (I.4c). In het bijzonder geldt $INC_{\min}(A, B) = 1_{L^*}$ als en slechts als $\Diamond A \subseteq \Box B$, dus breidt deze maat $\subseteq_{0,1}$ uit.

Een andere manier om de problemen te omzeilen bestaat erin formule (3.8) te herformuleren als, gesteld $U \neq \emptyset$,

$$A \subseteq B \iff \frac{|coA \cup B|}{|U|} = 1 \quad (3.20)$$

Gebruik makend van een negator N en een t -conorm S op $[0,1]$ kan men de vaaginclusiemaat $Inc_{S,N}$ definiëren door, voor A, B in $\mathcal{F}(U)$,

$$INC_{S,N}(A, B) = \frac{|co_N A \cup_S B|}{|U|} \quad (3.21)$$

Zij nu $\mathcal{N}$ een negator en S een t -conorm op L^* , en A, B L^* -vaagverzamelingen in U , dan gaat men gemakkelijk na dat de volgende uitdrukking een interval in $[0,1]$ is.

$$\left[\frac{\min \Sigma Count(co_{\mathcal{N}}(A) \cup_S B)}{|U|}, \frac{\max \Sigma Count(co_{\mathcal{N}}(A) \cup_S B)}{|U|} \right]$$

Om vergelijkingen met eerder ingevoerde inclusiemaaten mogelijk te maken, kunnen we uiteraard dit interval omzetten tot een element van L^* gebruik makend van de bijctie uit Stelling 2.50. Gelet op Definitie 2.21 van een S -implicator kunnen we daarom de volgende klasse $\mathcal{INC}_{S,\mathcal{N}}$ van verzamelinggebaseerde inclusiemaaten op L^* vooropstellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{INC}_{S,\mathcal{N}}(A, B) &= \left(\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} pr_1(\mathcal{I}_{S,\mathcal{N}}(A(u), B(u))), \right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} 1 - pr_2(\mathcal{I}_{S,\mathcal{N}}(A(u), B(u))) \right) \\ &= \left(\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} pr_1(\mathcal{I}_{S,\mathcal{N}}(A(u), B(u))), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} pr_2(\mathcal{I}_{S,\mathcal{N}}(A(u), B(u))) \right) \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} \mathcal{I}_{S,\mathcal{N}}(A(u), B(u)) \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid introduceert een verkorte notatie.

3.38 Voorbeeld. Beschouw in het bijzonder $\mathcal{INC}_{S_W^n, \mathcal{N}_s}$. Deze maat voldoet aan de eigenschappen (I.1) t.e.m. (I.3), (I.4a) en (I.4c), maar niet aan (I.4b) en evenmin aan (de uitgebreide versie van) (3.9). In die zin neemt zij een veel flexibeler opstelling aan m.b.t. het probleem van de jonge, welgestelde werknemers *zonder zoals (3.19) andere wenselijke eigenschappen op te offeren*. Merk ook het nauwe verband op met $\mathcal{INC}_{\mathcal{I}_{T_W^n}}$: in plaats van het infimum te berekenen van alle waarden $\mathcal{I}_{T_W^n}(A(u), B(u))$, berekent deze maat hun “gemiddelde”.

Het is opnieuw mogelijk een indirecte variant op dit procédé te formuleren. We laten de details achterwege, en resumeren onze bevindingen uit de voorbije sectie in het volgende

BESLUIT

Bij de selectie van een inclusiemaat op L^* dienen de volgende afwegingen gemaakt:

1. Is erfschap, i.e. formule (3.9), wenselijk?
2. Moet de maat in overeenstemming zijn met de “klassieke” inclusie, of met het alternatief $\subseteq_{0,1}$?

Tabel 3.6 geeft een overzicht van de verschillende keuzemogelijkheden. Het is treffend dat alle in de praktijk interessante maten de Łukasiewicz implicator I_{S_W} op $[0,1]$ uitbreiden.

	erfschap	geen erfschap
$\subseteq$	$\inf_{u \in U} \mathcal{I}_{S_W^n}(A(u), B(u))$	$\frac{1}{ U } \sum_{u \in U} \mathcal{I}_{S_W^n}(A(u), B(u))$
$\subseteq_{0,1}$	$\inf_{u \in U} \mathcal{I}_{S_W^r}(A(u), B(u))$	$\frac{1}{ U } \sum_{u \in U} \mathcal{I}_{S_W^r}(A(u), B(u))$

Tabel 3.6: Enkele belangrijke inclusiemaaten op L^* (A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$).

3.3 L^* –Vaagrelationele Beelden

Onder *vaagrelationele calculus* (zie bv. [42, 86, 87, 88]) verstaat men, in de ruimste interpretatie, de studie van L –vaagrelaties zoals ingevoerd in Definitie 2.44. Het belang hiervan, zowel in het algemeen als binnen het raamwerk van dit proefschrift, is nauwelijks te overschatten: L –vaagrelaties spelen o.m. een rol in vaagruwverzamelingenleer (Hoofdstuk 4), benaderend redeneren (Hoofdstuk 5), vaagrelationele databanken (o.m. de tweezijdige vaagverzamelingen uit Hoofdstuk 2), wiskundige morfologie voor beeldverwerking [103], vaagpreferentiestructuren [44] en het voorstellen van linguïstische wijzigers uit de natuurlijke taal. [46]

Voor onze doeleinden veruit het belangrijkste aspect van deze studie is het voorstellen van *vaagrelationele beelden*, meer i.h.b. van het (L^* –vaag)direct en (L^* –vaag)superdirect beeld⁶. De eerder opgedane kennis omtrent logisch–gebaseerde inclusiemaaten zal ons daarbij overigens uitstekend van pas komen. Als concrete semantische toets bij de theoretische resultaten werken we doorheen deze sectie het voorbeeld van L^* –vaagrelationele wijzigers [29] uit. Op die manier hopen we de lezer te behoeden voor de impressie als zou het gepresenteerde een puur technische kwestie zijn, of een herkauwen van meer algemene resultaten voor willekeurige tralies.

⁶In Hoofdstuk 5 komt ook nog het (vaag)subdirect beeld op de proppen.

3.39 Voorbeeld. Om te kunnen “rekenen met woorden” (*computing with words*) is een expliciete interface tussen het abstracte symbolische niveau (i.e. termen uit de natuurlijke taal) en een concrete, onderliggende numerieke representatie als vaagverzameling vereist, wat in het algemeen geen sinecure is. Een commissie van experts kan zich bv. buigen over de voorstelling van een *basis-term* zoals “hoge bloeddruk”, “aantrekkelijke beursnotering” of “onrustwekkend werkloosheidspercentage”. Naar de praktijk toe is het echter vaak ook interessant te beschikken over representaties van *gewijzigde termen* zoals “zeer onrustwekkend” of “min of meer onrustwekkend”; aangezien daarbij telkens hetzelfde grammaticaal patroon opduikt, nl. $\langle \text{wijziger} \rangle \langle \text{term} \rangle$, is het opportuun dit proces te automatiseren door bijwoorden als “zeer” en “min of meer” wiskundig te modelleren als operatoren op L -vaagverzamelingen. We hebben het dan over L -vaagwijzigers.

In het bijzondere geval van vaagverzamelingen modelleerde Zadeh [143], gegeven A in $\mathcal{F}(U)$, $zeer(A)$ en $mofm(A)$ (“min of meer A ”) door, voor u in U ,

$$zeer(A)(u) = A(u)^2 \quad (3.23)$$

$$mofm(A)(u) = \sqrt{A(u)} \quad (3.24)$$

Bijvoorbeeld, als men aanneemt dat een aandeel met een huidige waarde van 70€ “aantrekkelijk” (om te verkopen) is in de mate 0.5, dan noemt men het “zeer aantrekkelijk” in de mate 0.25 en “min of meer aantrekkelijk” in de mate 0.707...

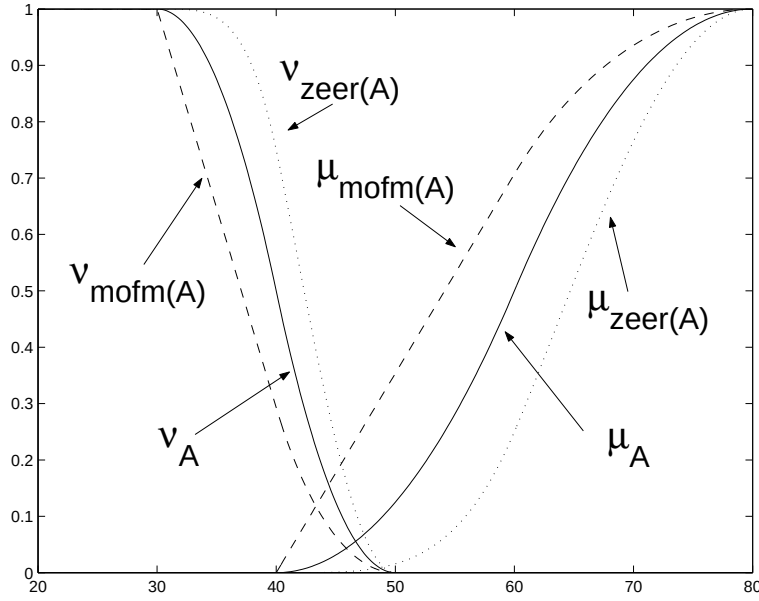
De, Biswas en Roy [41] breidden Zadehs methode uit tot IVs. Gegeven een L^* -vaagverzameling A in U introduceerden ze volgende uitdrukkingen, voor u in U :

$$zeer(A)(u) = (\mu_A(u)^2, 1 - (1 - \nu_A(u))^2) \quad (3.25)$$

$$mofm(A)(u) = (\sqrt{\mu_A(u)}, 1 - \sqrt{1 - \nu_A(u)}) \quad (3.26)$$

Om meer inzicht te verwerven in de structuur van bovenstaande formules, kan men ze herschrijven als $zeer(A)(u) = (zeer(\Box A)(u), 1 - zeer(\Diamond A)(u))$ en $mofm(A)(u) = (mofm(\Box A)(u), 1 - mofm(\Diamond A)(u))$. Ze passen in die zin dus in hetzelfde plaatje als de indirecte constructiemethode voor L^* -vaaginclusies.

Figuur 3.1 toont het resultaat van de inwerking van De, Biswas en Roys wijzigers op een L^* -vaagverzameling A (die we als “aantrekkelijke verkoopprijs” interpreteren). Men gaat na dat $zeer(A) \subseteq A \subseteq mofm(A)$, wat overeenstemt met de beperkende, resp. uitbreidende semantiek van de wijzigers “zeer” en “min of meer” (bv. een prijs die “zeer aantrekkelijk” is, is meteen ook “aantrekkelijk”). Een punt van kritiek [29, 46] is echter het gedrag van deze wijzigers m.b.t. de kern en de drager van A , dat ze in feite overerven van Zadehs wijzigers (3.23) en (3.24). In het bijzonder volgt uit $A(u) = 1_{L^*}$ ook $mofm(A)(u) = 1_{L^*}$ en $zeer(A)(u) = 1_{L^*}$ en uit $A(u) = 0_{L^*}$ ook $mofm(A)(u) = 0_{L^*}$ en $zeer(A)(u) = 0_{L^*}$, als gevolg waarvan dus bv. een prijs die “min of meer aantrekkelijk” is in de



Figuur 3.1: Wijzigers van De, Biswas en Roy.

mate 1_{L^*} noodzakelijk ook “aantrekkelijk” en “zeer aantrekkelijk” in die mate is, wat tegen de intuïtie indruist.

3.3.1 Definities

Gegeven een scherpe relatie R tussen de universa U en V bepaalt het *direct beeld* $R \uparrow A$ van een verzameling $A \subseteq U$ onder R deze elementen v uit V , die met minstens één element uit A in verband staan, m.a.w. waarvoor de doorsnede van de R -voorverzameling Rv met A niet leeg is. In symbolen noteren we

$$\begin{aligned} R \uparrow A &= \{v \mid v \in V \text{ en } (\exists u \in U)(u \in A \text{ en } (u, v) \in R)\} \\ &= \{v \mid v \in V \text{ en } Rv \cap A \neq \emptyset\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Onder het *superdirect beeld* $R \downarrow A$ verstaat men anderzijds de elementen v in V die in relatie staan tot enkel de elementen uit A , hetzij

$$\begin{aligned} R \downarrow A &= \{v \mid v \in V \text{ en } (\forall u \in U)((u, v) \in R \Rightarrow u \in A)\} \\ &= \{v \mid v \in V \text{ en } Rv \subseteq A\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

De aandachtige lezer herkent in (3.27) en (3.28) de uitdrukkingen voor $\overline{apr}_R(A)$ en $\underline{apr}_R(A)$ uit Sectie 2.2.3 wanneer i.h.b. $U = V$. In [42, 86] wordt het bovenstaande uitgebreid tot beelden van L -vaagverzamelingen onder L -vaagrelaties. We instantiëren de definities voor $L = L^*$.

3.40 Definitie (Direct beeld). Zij $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , R een L^* -vaagrelatie tussen U en V en A een L^* -vaagverzameling in U . Dan verstaat men onder het direct beeld van A onder R (met t-norm $\mathcal{T}$), de L^* -vaagverzameling $R \uparrow_{\mathcal{T}} A$ in V gegeven door, voor v in V ,

$$\begin{aligned} R \uparrow_{\mathcal{T}} A(v) &= \sup_{u \in U} \mathcal{T}(A(u), R(u, v)) \\ &= \mathcal{OVL}_{\mathcal{T}}(A, Rv) \end{aligned}$$

waarbij de tweede formule een verkorte schrijfwijze voor de eerste vormt; we spreken ook over de *mate van overlap* tussen A en Rv a.d.h.v. $\mathcal{T}$.

3.41 Definitie (Superdirect beeld). Zij $\mathcal{I}$ een implicator op L^* , R een L^* -vaagrelatie tussen U en V en A een L^* -vaagverzameling in U . Dan verstaat men onder het superdirect beeld van A onder R (met implicator $\mathcal{I}$), de L^* -vaagverzameling $R \downarrow_{\mathcal{I}} A$ in V gegeven door, voor v in V ,

$$\begin{aligned} R \downarrow_{\mathcal{I}} A(v) &= \inf_{u \in U} \mathcal{I}(R(u, v), A(u)) \\ &= \mathcal{INCL}_{\mathcal{I}}(Rv, A) \end{aligned}$$

Een element v in V behoort m.a.w. perfect, i.e. in de mate 1_{L^*} , tot $R \downarrow_{\mathcal{I}} A$ indien Rv perfect is geïncludeerd in A . Uit de voorgaande sectie weten we reeds dat de keuze van de implicator $\mathcal{I}$ bepalend is of we hiermee $Rv \subseteq A$ dan wel $Rv \subseteq_{1,0} A$ bedoelen. Anderzijds bekomt men dat voor het direct beeld $R \uparrow_{\mathcal{T}} A$, in het geval van t-representeerbare $\mathcal{T}$ met duale representanten T en S t.o.v. N_s , geldt:

$$\begin{aligned} R \uparrow_{\mathcal{T}} A(v) &= \mathcal{OVL}_{\mathcal{T}}(A, Rv) \\ &= \sup_{u \in U} (T(\mu_A(u), \mu_R(u, v)), S(\nu_A(u), \nu_R(u, v))) \\ &= \left(\sup_{u \in U} T(\mu_A(u), \mu_R(u, v)), \inf_{u \in U} 1 - T(1 - \nu_A(u), 1 - \nu_R(u, v)) \right) \\ &= \left(\sup_{u \in U} T(\mu_A(u), \mu_R(u, v)), 1 - \sup_{u \in U} T(1 - \nu_A(u), 1 - \nu_R(u, v)) \right) \\ &= (\mathcal{OVL}_T(\Box A, \Box Rv), 1 - \mathcal{OVL}_T(\Diamond A, \Diamond Rv)) \end{aligned}$$

waarbij $\mathcal{OVL}_T(A, B) = \sup_{u \in U} T(A(u), B(u))$ voor vaagverzamelingen A en B in U . In het bijzonder geldt $R \uparrow_T A(v) = 0_{L^*}$ indien $\mathcal{OVL}_T(\Diamond A, \Diamond Rv) = 0$, m.a.w. indien er zelfs in het meest “optimistische” scenario geen enkele overlap is tussen A en Rv .

3.42 Voorbeeld. In [46] wordt een *contextgebaseerde* aanpak voor de modellering van linguïstische wijzigers uiteengezet. Daarin wordt afgestapt van het idee, o.m. impliciet in de formules (3.25) en (3.26), dat de mate waarin u behoort tot *zeer*(A) en *mofm*(A) enkel afhankelijk is van $A(u)$, en wordt daarentegen ook rekening gehouden met de context van een element; onder de “context van v in

U " verstaat men concreet de L^* -vaagverzameling van elementen u in U die via een vooropgestelde binaire L^* -vaagrelatie R over U , die benaderende gelijkheid uitdrukt, met v in verband staan, met andere woorden de R -voorverzameling van v .

De grondgedachte kan als volgt worden verwoord: een element v behoort tot $zeer(A)$ in de mate dat alle objecten die op v lijken, eveneens tot A behoren, terwijl v tot $mofm(A)$ behoort in de mate dat minstens één object dat lijkt op v , tot A behoort. Wiskundig uitgedrukt, voor v in U :

$$\begin{aligned} zeer(A)(v) &= \mathcal{INC}_{\mathcal{I}}(Rv, A) &= R \downarrow_{\mathcal{I}} A(v) \\ mofm(A)(v) &= \mathcal{OVL}_{\mathcal{T}}(A, Rv) &= R \uparrow_{\mathcal{T}} A(v) \end{aligned}$$

Laten we dit toepassen op de gegevens uit Voorbeeld 3.39. Om de binaire L^* -vaagrelatie R over $\mathbb{R}$ op te bouwen maken we gebruik van een zogenaamde $\mathbb{S}$ -vormfunctie, d.i. een $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ afbeelding. Gegeven parameters α, γ in $\mathbb{R}$, $\alpha < \gamma$, definieert men, voor u in $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{S}(u; \alpha, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{als } u \leq \alpha \\ \frac{2(u-\alpha)^2}{(\gamma-\alpha)^2} & \text{als } \alpha \leq u \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 1 - \frac{2(u-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)^2} & \text{als } \frac{\alpha+\gamma}{2} \leq u \leq \gamma \\ 1 & \text{als } \gamma \leq u \end{cases}$$

Concreet wordt R bepaald door, voor u, v in $\mathbb{R}$,

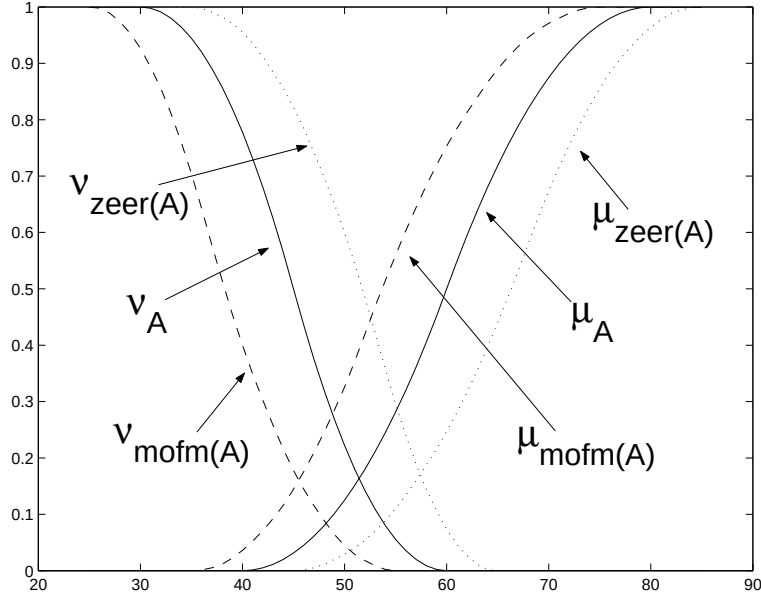
$$\mu_R(u, v) = \begin{cases} \mathbb{S}(u; v-20, v-5) & \text{als } u \leq v-5 \\ 1 & \text{als } v-5 < u < v+5 \\ 1 - \mathbb{S}(u; v+5, v+20) & \text{als } v+5 \leq u \end{cases}$$

en $\nu_R(u, v) = 1 - \mu_R(u, v)$. We onderstellen dus dat in het vaststellen van de gelijkwaardigheid tussen elementen geen onbepaaldheid optreedt. A wordt gewijzigd tot $zeer(A)$ en $mofm(A)$ door het superdirect beeld m.b.v. $\mathcal{I}_{\mathcal{T}_W^n}$ (resp. direct beeld m.b.v. $\mathcal{T}_W^n$) te nemen onder R . De resultaten zijn afgebeeld in Figuur 3.2. Merk vooral op dat deze aanpak niet de problemen i.v.m. kern en drager vertoont waaraan De, Biswas en Roys wijzigers onderhevig zijn. Voor een meer grondige analyse (in termen van L -vaagrelationele wijzigers) van deze problematiek verwijzen we naar [46].

3.3.2 Eigenschappen van Directe en Superdirecte Beelden

In [42] en [46] werden reeds voor algemene L -vaagrelationele beelden een groot aantal eigenschappen onderzocht. Met het oog op hun nut verderop⁷ brengen we hierna de belangrijkste resultaten, toegepast op L^* , in herinnering.

⁷Door de resultaten hieronder uiteen te zetten voor $L = L^*$ hebben we een compromis-keuze gemaakt; meer algemene tralies komen enerzijds verder in dit proefschrift nagenoeg niet voor, terwijl het anderzijds voor zich spreekt dat onderstaande stellingen geldig blijven indien L^* vervangen wordt door $[0, 1]$ (in welk geval een aantal voorwaarden zich eventueel wel vereenvoudigt).



Figuur 3.2: L^* -vaagrelationele wijzigers.

3.43 Stelling (Monotoniteit). Zij A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U \times V)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een implicator op L^* . Indien $A \subseteq B$, dan is ook $R \uparrow_{\mathcal{T}} A \subseteq R \uparrow_{\mathcal{T}} B$ en $R \downarrow_{\mathcal{I}} A \subseteq R \downarrow_{\mathcal{I}} B$.

3.44 Stelling (Monotoniteit). Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R_1, R_2 in $\mathcal{F}_{L^*}(U \times V)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een implicator op L^* . Indien $R_1 \subseteq R_2$, dan is $R_1 \uparrow_{\mathcal{T}} A \subseteq R_2 \uparrow_{\mathcal{T}} A$ en $R_1 \downarrow_{\mathcal{I}} A \supseteq R_2 \downarrow_{\mathcal{I}} A$.

3.45 Stelling (Interactie met doorsnede). Zij A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U \times V)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een implicator op L^* . Dan geldt:

$$\begin{aligned} R \uparrow_{\mathcal{T}} (A \cap B) &\subseteq R \uparrow_{\mathcal{T}} A \cap R \uparrow_{\mathcal{T}} B \\ R \downarrow_{\mathcal{I}} (A \cap B) &\subseteq R \downarrow_{\mathcal{I}} A \cap R \downarrow_{\mathcal{I}} B \end{aligned}$$

Indien bovendien $\mathcal{I}$ voldoet aan $\mathcal{I}(x, \inf(y, z)) = \inf(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z))$, voor x, y, z in L^* , dan geldt ook:

$$R \downarrow_{\mathcal{I}} (A \cap B) = R \downarrow_{\mathcal{I}} A \cap R \downarrow_{\mathcal{I}} B$$

3.46 Stelling (Interactie met unie). Zij A, B in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U \times V)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een implicator op L^* . Dan geldt:

$$\begin{aligned} R \uparrow_{\mathcal{T}} A \cup R \uparrow_{\mathcal{T}} B &\subseteq R \uparrow_{\mathcal{T}} (A \cup B) \\ R \downarrow_{\mathcal{I}} A \cup R \downarrow_{\mathcal{I}} B &\subseteq R \downarrow_{\mathcal{I}} (A \cup B) \end{aligned}$$

Indien bovendien $\mathcal{T}$ voldoet aan $\mathcal{T}(\sup(x, y), z) = \sup(\mathcal{T}(x, z), \mathcal{T}(y, z))$, voor x, y, z in L^* , dan geldt ook:

$$R \uparrow_{\mathcal{T}} A \cup R \uparrow_{\mathcal{T}} B = R \uparrow_{\mathcal{T}} (A \cup B)$$

3.47 Stelling (Interactie met complement). Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U \times V)$, $\mathcal{T}$ een t -norm op L^* . Stel bovendien $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{I}}$. Dan geldt:

$$co_{\mathcal{N}}(R \uparrow_{\mathcal{T}} A) \subseteq R \downarrow_{\mathcal{I}} (co_{\mathcal{N}} A) \quad (3.31)$$

Indien bovendien $\mathcal{T}$ voldoet aan $\mathcal{T}(\sup(x, y), z) = \sup(\mathcal{T}(x, z), \mathcal{T}(y, z))$, voor x, y, z in L^* , dan geldt ook:

$$R \uparrow_{\mathcal{T}} (co_{\mathcal{N}} A) \subseteq co_{\mathcal{N}}(R \downarrow_{\mathcal{I}} A) \quad (3.32)$$

Is $\mathcal{N}$ bovendien involutief, dan geldt in (3.31) en (3.32) de gelijkheid.

Een tweede reeks eigenschappen heeft betrekking op $U = V$. We kennen in dit geval ook een uitbreiding van het begrip equivalentierelatie over U .

3.48 Definitie (L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie). Zij $\mathcal{T}$ een t -norm op L^* . Een binaire L^* -vaagrelatie R over U die voldoet aan

- | | | |
|-------|---|----------------------------------|
| (T.1) | $(\forall u \in U)(R(u, u) = 1_{L^*})$ | (reflexiviteit) |
| (T.2) | $(\forall u, v \in U)(R(u, v) = R(v, u))$ | (symmetrie) |
| (T.3) | $(\forall u, v, w \in U)(\mathcal{T}(R(u, v), R(v, w)) \leq_{L^*} R(u, w))$ | ($\mathcal{T}$ -transitiviteit) |

wordt een L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie over U genoemd⁸.

Bij de constructie van L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelaties over U kan, indien $\mathcal{T}$ hetzij t -representeerbaar, hetzij pseudo t -representeerbaar is met duale representanten T en S t.o.v. N_s , een beroep gedaan worden op (eenvoudiger te genereren) vage T -equivalentierelaties R_1 en R_2 over U waarvoor $R_1 \subseteq R_2$. Inderdaad, de binaire L^* -vaagrelatie R over U bepaald door, voor u, v in U ,

$$R(u, v) = (R_1(u, v), 1 - R_2(u, v))$$

is een L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie over U . Men gaat immers eenvoudig na dat reflexiviteit en symmetrie uit de corresponderende eigenschappen van R_1 en R_2 volgen. Anderzijds volgt $\mathcal{T}$ -transitiviteit, bijvoorbeeld in het geval van pseudo t -representeerbare $\mathcal{T}$, uit de volgende afleiding, voor u, v, w in U :

⁸Indien men in het bovenstaande L^* vervangt door $[0, 1]$, noemen we de corresponderende notie eenvoudigweg een vage T -equivalentierelatie over U (gegeven een t -norm T op $[0, 1]$).

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(R(u, v), R(v, w)) &= (T(R_1(u, v), R_1(v, w)), \min(S(1 - R_2(u, v), \\
&\quad 1 - R_1(v, w)), S(1 - R_1(u, v), 1 - R_2(v, w)))) \\
&= (T(R_1(u, v), R_1(v, w)), \min(1 - T(R_2(u, v), \\
&\quad R_1(v, w)), 1 - T(R_1(u, v), R_2(v, w)))) \\
&\leq_{L^*} (T(R_1(u, v), R_1(v, w)), 1 - T(R_2(u, v), R_2(v, w))) \\
&\leq_{L^*} (R_1(u, w), 1 - R_2(u, w)) \\
&= R(u, w)
\end{aligned}$$

3.49 Voorbeeld. Zij $U = [0, 100]$, en beschouw de vage T_W -equivalentierelatie R_c , $c > 0$, over U bepaald door, voor u, v in U , [30]

$$R_c(u, v) = \max\left(0, 1 - \frac{|u - v|}{c}\right)$$

Indien $c_1 \leq c_2$ dan is blijkbaar $R_{c_1}(u, v) \leq R_{c_2}(u, v)$ en dus is R bepaald door

$$R(u, v) = (R_{c_1}(u, v), 1 - R_{c_2}(u, v))$$

een L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie over U voor $\mathcal{T} = \mathcal{T}_W^r$ en $\mathcal{T} = \mathcal{T}_W^n$.

3.50 Stelling (Uitbreidend/Beperkend). Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U^2)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een randimplicator op L^* . Indien R reflexief is, dan geldt $R \downarrow_{\mathcal{I}} A \subseteq A \subseteq R \uparrow_{\mathcal{T}} A$.

3.51 Stelling (Idempotentie). Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U^2)$ een reflexieve en $\mathcal{T}$ -transitieve L^* -vaagrelatie over U , $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I}$ een randimplicator op L^* . Indien $\mathcal{T}$ aan de residueringsvoorwaarde (2.1) voldoet, dan geldt

$$R \uparrow_{\mathcal{T}} (R \uparrow_{\mathcal{T}} A) = R \uparrow_{\mathcal{T}} A$$

Indien anderzijds $\mathcal{I}$ voldoet aan $\mathcal{I}(x, \inf(y, z)) = \inf(\mathcal{I}(x, y), \mathcal{I}(x, z))$, en aan $\mathcal{I}(x, \mathcal{I}(y, z)) \geq_{L^*} \mathcal{I}(\mathcal{T}(x, y), z)$ voor x, y, z in L^* , dan geldt ook

$$R \downarrow_{\mathcal{I}} (R \downarrow_{\mathcal{I}} A) = R \downarrow_{\mathcal{I}} A$$

3.52 Stelling (Gemengde beelden). Zij A in $\mathcal{F}_{L^*}(U)$, R in $\mathcal{F}_{L^*}(U^2)$, $\mathcal{T}$ een t-norm op L^* , $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}$. Indien R een L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie over U is, en $\mathcal{T}$ aan de residueringsvoorwaarde (2.1) voldoet, dan geldt

$$\begin{aligned}
R \uparrow_{\mathcal{T}} (R \downarrow_{\mathcal{I}} A) &= R \downarrow_{\mathcal{I}} A \\
R \downarrow_{\mathcal{I}} (R \uparrow_{\mathcal{T}} A) &= R \uparrow_{\mathcal{T}} A
\end{aligned}$$

3.3.3 Verdeel en Heers

We hebben gezien hoe we de wijzigers van De, Biswas en Roy kunnen opvatten als een dubbele toepassing van gekende vaagwijzigers. Met de kennis uit Sectie 3.3.1 weten we ondertussen dat die vlieger ook opgaat voor de contextgebaseerde aanpak mits een geschikte keuze van (t-representeerbare) connectieven. Er bestaat evenwel ook een andere aanpak om het probleem van het wijzigen van L^* -vaagverzamelingen te herleiden tot een eenvoudiger probleem, die gebaseerd is op de bevindingen uit [16]; daarin wordt de betekenis van “not overly bright” (niet bijzonder snugger) omschreven als “rather underly bright” (eerder niet snugger). Door dit (vereenvoudigend) op onze formele behandeling van de wijzigers “zeer” en “min of meer” te betrekken, kunnen we nagaan onder welke omstandigheden bv. de wiskundige representatie van “niet zeer A ” en “min of meer niet A ” samenvallen. *Onze aandacht gaat daarbij niet uit naar een reeks betrekkingen in de zin van Stelling 3.47, maar we willen concreet toetsen of*

$$\mu_{\text{zeer}(A)} = \text{zeer}(\mu_A) \quad (3.33)$$

$$\nu_{\text{zeer}(A)} = \text{mofm}(\nu_A) \quad (3.34)$$

$$\mu_{\text{mofm}(A)} = \text{mofm}(\mu_A) \quad (3.35)$$

$$\nu_{\text{mofm}(A)} = \text{zeer}(\nu_A) \quad (3.36)$$

met in ons achterhoofd het idee, dat we μ_A en ν_A als voorstellingen van resp. wél en niet A kunnen opvatten. We noemen dit de *verdeel-en-heers* strategie.

Dat deze aanpak faalt voor De, Biswas en Roys wijzigers is eenvoudig numeriek te verifiëren. Anderzijds leren de volgende eigenschappen van L^* -vaagrelationele beelden ons in welke omstandigheden (3.33) t.e.m. (3.36) voor de contextgebaseerde aanpak zijn vervuld.

3.53 Stelling. Zij $\mathcal{T}$ een t-representeerbare t-norm op L^* met duale representanten T en S t.o.v. N_s en A een L^* -vaagverzameling in U , R een binaire L^* -vaagrelatie over U . Dan geldt

$$R\uparrow_{\mathcal{T}} A = (\mu_R\uparrow_T \mu_A, (co(\nu_R))\downarrow_{I_{S,N_s}} \nu_A)$$

Bewijs. Voor elke v in U geldt

$$\begin{aligned} R\uparrow_{\mathcal{T}} A(v) &= \sup_{u \in U} \mathcal{T}(R(u, v), A(u)) \\ &= \sup_{u \in U} (T(\mu_R(u, v), \mu_A(u)), S(\nu_R(u, v), \nu_A(u))) \\ &= \left(\sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \mu_A(u)), \inf_{u \in U} I_{S,N_s}(1 - \nu_R(u, v), \nu_A(u)) \right) \\ &= \left((\mu_R\uparrow_T \mu_A)(v), (co(\nu_R)\downarrow_{I_{S,N_s}} \nu_A)(v) \right) \end{aligned}$$

□

3.54 Stelling. Zij $\mathcal{T}$ een pseudo t-representeerbare t-norm op L^* met representanten T en S en A een L^* -vaagverzameling in U , R een binaire L^* -vaagrelatie over U . Dan geldt

$$R\uparrow_{\mathcal{T}}A = (\mu_R\uparrow_{\mathcal{T}}\mu_A, (\mu_R\downarrow_{I_{S,N_s}}\nu_A) \cap ((co(\nu_R))\downarrow_{I_{S,N_s}}co(\mu_A)))$$

Bewijs. Voor elke v in U geldt

$$\begin{aligned} R\uparrow_{\mathcal{T}}A(v) &= \sup_{u \in U} \mathcal{T}(R(u, v), A(u)) \\ &= \sup_{u \in U} (T(\mu_R(u, v), \mu_A(u)), \min(S(1 - \mu_R(u, v), \nu_A(u)), \\ &\quad S(\nu_R(u, v), 1 - \mu_A(u))) \\ &= \left(\sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \mu_A(u)), \min \left(\inf_{u \in U} I_{S,N_s}(\mu_R(u, v), \nu_A(u)), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \inf_{u \in U} I_{S,N_s}(1 - \nu_R(u, v), 1 - \mu_A(u)) \right) \right) \\ &= ((\mu_R\uparrow_{\mathcal{T}}\mu_A)(v), ((\mu_R\downarrow_{I_{S,N_s}}\nu_A) \cap ((co(\nu_R))\downarrow_{I_{S,N_s}}co(\mu_A)))(v)) \end{aligned}$$

□

3.55 Stelling. Zij $\mathcal{S}$ een t-representeerbare t-conorm op L^* met duale representanten S en T t.o.v. N_s en A een L^* -vaagverzameling in U , R een binaire L^* -vaagrelatie over U . Dan geldt:

$$R\downarrow_{I_{S,N_s}}A = ((co\nu_R)\downarrow_{I_{S,N_s}}\mu_A, \mu_R\uparrow_T\nu_A)$$

Bewijs. Voor elke v in U geldt

$$\begin{aligned} R\downarrow_{I_{S,N_s}}A(v) &= \inf_{u \in U} I_{S,N_s}(R(u, v), A(u)) \\ &= \inf_{u \in U} \mathcal{S}(\mathcal{N}_s(R(u, v)), A(u)) \\ &= \left(\inf_{u \in U} S(\nu_R(u, v), \mu_A(u)), \sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \nu_A(u)) \right) \\ &= \left(\inf_{u \in U} I_{S,N_s}(1 - \nu_R(u, v), \mu_A(u)), \sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \nu_A(u)) \right) \\ &= ((co(\nu_R)\downarrow_{I_{S,N_s}}\mu_A)(v), (\mu_R\uparrow_T\nu_A)(v)) \end{aligned}$$

□

3.56 Stelling. Zij $\mathcal{S}$ een pseudo t-representeerbare t-conorm met representanten S en T op L^* en A een L^* -vaagverzameling in U , R een binaire L^* -vaagrelatie over U . Dan geldt

$$R\downarrow_{I_{S,N_s}}A = ((\mu_R\downarrow_{I_{S,N_s}}\mu_A) \cap ((co(\nu_R))\downarrow_{I_{S,N_s}}co(\nu_A)), (\mu_R\uparrow_T\nu_A))$$

Bewijs. Voor elke v in U geldt

$$\begin{aligned}
R \downarrow_{\mathcal{I}_S, \mathcal{N}_s} A(v) &= \inf_{u \in U} \mathcal{I}_{S, \mathcal{N}_s}(R(u, v), A(u)) \\
&= \inf_{u \in U} \mathcal{S}(\mathcal{N}_s(R(u, v)), A(u)) \\
&= \left(\inf_{u \in U} \min(S(1 - \mu_R(u, v), \mu_A(u)), S(\nu_R(u, v), 1 - \nu_A(u))), \right. \\
&\quad \left. \sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \nu_A(u)) \right) \\
&= \left(\inf_{u \in U} \min(I_{S, \mathcal{N}_s}(\mu_R(u, v), \mu_A(u)), \right. \\
&\quad \left. I_{S, \mathcal{N}_s}(1 - \nu_R(u, v), 1 - \nu_A(u))), \sup_{u \in U} T(\mu_R(u, v), \nu_A(u)) \right) \\
&= (((\mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} \mu_A) \cap ((co(\nu_R)) \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} co(\nu_A)))(v), (\mu_R \uparrow_T \nu_A)(v))
\end{aligned}$$

□

3.57 Gevolg. Onder de voorwaarden van Stellingen 3.53, 3.54, 3.55 en 3.56 geldt, indien $\nu_R = co(\mu_R)$, m.a.w. indien R een binaire vaagrelatie over U is,

$$R \uparrow_T A = (\mu_R \uparrow_T \mu_A, \mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} \nu_A) \quad (3.37)$$

$$R \downarrow_{\mathcal{I}_S, \mathcal{N}_s} A = (\mu_R \downarrow_{\mathcal{I}_S, \mathcal{N}_s} \mu_A, \mu_R \uparrow_T \nu_A) \quad (3.38)$$

Bewijs. We tonen bv. (3.38) aan in het geval $\mathcal{S}$ een pseudo t-representeerbare t-conorm op L^* is met representanten S en T . We vinden achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}
(\mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} \mu_A) \cap (co(\nu_R) \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} co(\nu_A)) &= (\mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} \mu_A) \cap (\mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} co(\nu_A)) \\
&= \mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} (\mu_A \cap co(\nu_A)) \\
&= \mu_R \downarrow_{I_{S, \mathcal{N}_s}} \mu_A
\end{aligned}$$

We hebben daarbij gesteund op $\mu_A \subseteq co(\nu_A)$ en op Stelling 3.45⁹. □

3.4 Tweezijdigheid: de Aard van het Beestje

Het moet de lezer ongetwijfeld hebben verbaasd, dat we tot dusver in dit hoofdstuk met geen woord hebben gerept over wat nu eigenlijk het “verschil” is tussen intuïtionistische vaagverzamelingen en intervalwaardige vaagverzamelingen, terwijl we het wel herhaaldelijk hebben gehad over de “semantiek van een L^* -vaagverzameling”; een semantiek die ofwel heel nauwgezet de orde-theoretische krijtlijnen uitgezet door de L -vaagverzamelingenleer kan volgen, ofwel zich een eigen identiteit kan smeden a.d.h.v. het begrip onbepaaldheid (zie de twee voorgaande secties).

⁹Merk op dat $I(x, \inf(y, z)) = \inf(I(x, y), I(x, z))$ met x, y, z in $[0, 1]$ voldaan is voor willekeurige implicator I op $[0, 1]$.

Het doel van deze sectie is dan ook niet alsnog een “wondermiddeltje” uit onze mouw te schudden dat voor elk probleem uitmaakt of het nu IVs dan wel IWVs zijn die we nodig hebben. Anderzijds moet men ook niet zomaar het kind met het badwater weggooien: in het doorgronden van wat precies aan een model ten oorsprong ligt, komen vaak inzichten aan het licht die nieuwe pistes blootleggen.

3.4.1 De Kip of het Ei?

Historisch gezien verschenen IWVs minstens acht jaar vroeger ten tonele dan IVs; Atanassov [7] beweert evenwel in 1983 niet op de hoogte van hun bestaan geweest. Gezien de geringe verspreiding van het ideeëngoed van IWVs voor 1986–1987 (wanneer [77] en [126] gepubliceerd werden), zeker binnen het door communisme geïsoleerde Bulgarije, hoeft dit geen opzien te baren. Het laat zich raden dat wanneer Atanassov met IVs op de proppen kwam, het in de eerste plaats het openbreken van de relatie tussen lidmaatschap en niet-lidmaatschap, tussen positief en negatief, was dat hoge ogen gooide. Niettemin haalt Atanassov graag aan (bv. [6]) dat het vooral de uitgebreide modale operatoren D_α zijn geweest, m.a.w. het distribueren van de onbepaaldheid $\pi_A(u)$ over $\mu_A(u)$ en $\nu_A(u)$, die hem indertijd over de streep hebben getrokken om door te gaan met het onderzoek op IVs. Laat dit nu net een aspect van de theorie zijn dat eigenlijk nauwer aanleunt bij IWVs! Want, eerlijkheidshalve, had Atanassov niet geëist dat de som van $\mu_A(u)$ en $\nu_A(u)$ ten hoogste 1 was, dan had er van $\pi_A(u)$, de marge van onbepaaldheid—in feite de lengte van $[(\Box A)(u), (\Diamond A)(u)]$ —onmogelijk sprake kunnen zijn. *In feite zijn de uitgebreide modale operatoren D_α dus een belangrijke bijdrage aan de intervalwaardige vaagverzamelingenleer*, maar omwille van de “verpakking” is het aanbod in dovemansoren gevallen.

Anderzijds was het de theorie der bitralies, ontwikkeld aan het eind van de jaren '80 door Ginsberg [75] en gegroeid uit Belnaps vierwaardige logica, die die “verpakking” pas écht te gelde zou maken. Het is tekenend dat (bij ons weten) niemand uit die hoek ooit heeft verwezen naar, laat staan een vergelijking heeft gemaakt met, intuïtionistische vaagverzamelingen.

3.4.2 Vierkanten en Driehoeken—IWVs en IVs Binnen een Ruimer Kader

We nemen de draad over bitralies op waar we hem in Voorbeeld 2.38 hebben laten liggen. We hebben daarin geleerd hoe Belnaps vierwaardige logica de verzameling $\{0, 1\}^2$ uitrust met een bitraliestructuur, waarbij intuïtief de eerste component een waarheidswaarde en de tweede component een valsheidswaarde voorstelt. Dit doet alvast de vraag rijzen, of voor een meer algemene structuur, i.h.b. een complete tralie L , dit constructiemechanisme bewaard blijft.

3.58 Definitie (Vierkant). [75] Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie. Onder het vierkant bepaald door $(L, \leq_L)$ verstaat men de structuur $\Box_{(L, \leq_L)} = (L^2, \leq_t)$,

$\leq_k, \mathcal{N}$) gedefinieerd door, voor $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ in L^2 ,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \leq_t (y_1, y_2) &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } x_2 \geq_L y_2 \\ (x_1, x_2) \leq_k (y_1, y_2) &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } x_2 \leq_L y_2 \\ \mathcal{N}(x_1, x_2) &= (x_2, x_1) \end{aligned}$$

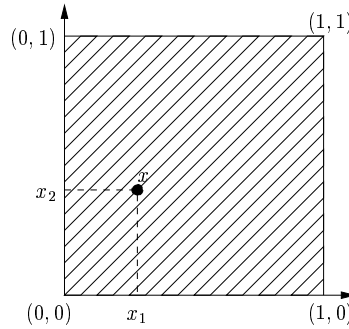
3.59 Stelling. [75] Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie. Dan is $\square_{(L, \leq_L)}$ een verweefde bitralie. Is bovendien $(L, \leq_L)$ distributief, dan is $\square_{(L, \leq_L)}$ dat ook.

Anderzijds bewees Fitting [66] dat het bestaan van een conflator in $\square_{(L, \leq_L)}$ gegarandeerd is door het bestaan van een involutieve negator op $(L, \leq_L)$.

3.60 Definitie (Geïnduceerde conflator). Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie en N een involutieve negator op L . Dan verstaat men onder de geïnduceerde conflator van N in $\square_{(L, \leq_L)}$ de $L^2 \rightarrow L^2$ afbeelding $\mathcal{C}_N$ bepaald door, voor (x_1, x_2) in L^2 ,

$$\mathcal{C}_N(x_1, x_2) = (N(x_2), N(x_1))$$

3.61 Voorbeeld. Volgens Stelling 3.59 is $\square_{([0,1], \leq)} = ([0,1]^2, \leq_t, \leq_k, \mathcal{N})$ een distributieve bitralie. Merk op hoe deze structuur, weergegeven in Figuur 3.3, $(L^*, \leq_{L^*})$ veralgemeent: inderdaad is de orderrelatie $\leq_{L^*}$ het spoor van $\leq_t$ op $(L^*)^2$, m.a.w. $\leq_{L^*} = \leq_t \cap (L^*)^2$, en is $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_s(x)$ voor x in L^* . Anderzijds bepaalt het spoor van $\leq_k$ op $(L^*)^2$ nog wel een orderrelatie op L^* , maar geen traliestructuur, aangezien bv. $(0.7, 0.2) \oplus (0.5, 0.4) = (0.7, 0.4) \notin L^*$. Men gaat ook na dat $\mathcal{C}_{N_s}(x_1, x_2) = (1 - x_2, 1 - x_1)$ voor (x_1, x_2) in $[0, 1]^2$.



Figuur 3.3: De bitralie $\square_{([0,1], \leq)}$.

3.62 Opmerking. De structuur $\square_{([0,1], \leq)}$ is relatief onverkend gebied binnen de vaagverzamelingenleer. Fortemps en Slowinski [71] gebruiken haar als een raamwerk voor het voorstellen en aggregeren van positieve en negatieve argumenten in preferentieel; in [34] werd een aanzet gegeven tot een formele studie van logische connectieven m.b.t. tot de $\leq_t$ orde.

3.63 Definitie (Driehoek). [67] Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie. Onder de driehoek bepaald door $(L, \leq_L)$ verstaat men de structuur $\Delta_{(L, \leq_L)} = (I(L), \leq_t, \leq_k)$ waarbij

$$I(L) = \{[x_1, x_2] \mid (x_1, x_2) \in L^2 \text{ en } x_1 \leq_L x_2\}$$

en, voor $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$ in $I(L)$,

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \leq_t [y_1, y_2] &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } x_2 \leq_L y_2 \\ [x_1, x_2] \leq_k [y_1, y_2] &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } y_2 \leq_L x_2 \end{aligned}$$

3.64 Voorbeeld. Men ziet gemakkelijk in dat indien $L = ([0, 1], \leq)$, $I([0, 1]) = L^I$ en $\leq_t = \leq_{L^I}$. $\Delta_{([0, 1], \leq)}$ breidt dus $(L^I, \leq_{L^I})$ uit met een extra ordening $\leq_k$; $[x_1, x_2] \leq_k [y_1, y_2]$ indien het interval $[y_1, y_2]$ *bevat* zit in $[x_1, x_2]$, m.a.w. er een deelinterval van is; dit betekent inderdaad dat het meer precieze informatie geeft dan $[x_1, x_2]$. Aangezien de $\leq_k$ -orde echter $I(L)$ geen traliestructuur bezorgt, is $\Delta_{(L, \leq_L)}$ geen bitralie.

3.65 Stelling. [67] Zij $(L, \leq_L)$ een complete tralie en N een involutieve negator op $(L, \leq_L)$. Dan is $\Delta_{(L, \leq_L)}$ orde-isomorf met de verzameling der consistente elementen van $\square_{(L, \leq_L)}$ t.o.v. $\mathcal{C}_N$.

Bewijs. Definieer de $I(L) \rightarrow L^2$ afbeelding f als, voor $[x_1, x_2]$ in $I(L)$,

$$f([x_1, x_2]) = (x_1, N(x_2))$$

$f([x_1, x_2])$ is consistent, aangezien $(x_1, N(x_2)) \leq_k \mathcal{C}_N(x_1, N(x_2)) = (x_2, N(x_1))$. Vermits N involutief is, is f een injectie. Anderzijds, zij (x_1, x_2) in L^2 consistent. Dan is $(x_1, x_2) \leq_k \mathcal{C}_N(x_1, x_2)$, waaruit $x_1 \leq_L N(x_2)$ en dus $[x_1, N(x_2)] \in I(L)$ volgt. Aangezien nu $f([x_1, N(x_2)]) = (x_1, x_2)$ is f ook een surjectie.

Om tenslotte te bewijzen dat f een orde-isomorfisme is (zowel m.b.t. de $\leq_t$ -orde als de $\leq_k$ -orde) volstaan de volgende afleidingen:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \leq_t [y_1, y_2] &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } x_2 \leq_L y_2 \\ &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } N(x_2) \geq_L N(y_2) \\ &\iff (x_1, N(x_2)) \leq_t (y_1, N(y_2)) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] \leq_k [y_1, y_2] &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } x_2 \geq_L y_2 \\ &\iff x_1 \leq_L y_1 \text{ en } N(x_2) \leq_L N(y_2) \\ &\iff (x_1, N(x_2)) \leq_k (y_1, N(y_2)) \end{aligned}$$

□

Bovenstaand resultaat veralgemeent Stelling 2.50, die het bijzonder geval $(L, \leq_L) = ([0, 1], \leq)$ en $N = N_s$ behandelt. Het is enigszins verwonderlijk dat het Atanassov zelf is die diverse andere voorbeelden aanreikt.

3.66 Voorbeeld. In [8] verruimden Atanassov en Stoeva IVs tot *intuitionistische L -vaagverzamelingen*. Gegeven een complete tralie $(L, \leq_L)$, N een involutieve negator op L , verstaat men onder een intuitionistische L -vaagverzameling in U elke $U \rightarrow L^2$ afbeelding A die voldoet aan, met $A(u) = (x_1, x_2)$ voor u in U ,

$$x_1 \leq_L N(x_2)$$

Het is niet moeilijk in te zien dat deze definitie de perfecte belichaming is van Stelling 3.65.

3.67 Voorbeeld. Een *intuitionistische vaagverzameling A in U van het tweede type* [5] is een veralgemening van een IV, in de zin dat voor een element u in U , $\mu_A(u)^2 + \nu_A(u)^2 \leq 1$, $\mu_A(u) \geq 0$, $\nu_A(u) \geq 0$ moet gelden. Dit houdt in dat het gebied waaruit men het koppel $(\mu_A(u), \nu_A(u))$ kan kiezen het eerste kwadrant van de goniometrische cirkel bestrijkt. Men kan de voorwaarde op μ_A en ν_A ook herschrijven als $\nu_A(u) \leq \sqrt{1 - \mu_A(u)^2} = N(\mu_A(u))$, waarbij N de involutieve negator op $[0,1]$ bepaald door $N(x) = \sqrt{1 - x^2}$ voor x in $[0,1]$ is. Opnieuw valt deze uitbreiding van het concept IV dus onder het toepassingsgebied van Stelling 3.65.

Het bovenstaande bevestigt de hypothese dat Atanassov het idee van bitralies voor is geweest, maar dat hij door zich te beperken tot de consistente elementen, onvermijdelijk in een intervalwaardig vaarwater terecht is gekomen.

3.4.3 Op een Kruispunt van Imprecisie

Het gebruik van intervallen beantwoordt dus in de eerste plaats aan *onbepaaldheid*. Bitralies benadrukken vooral het onafhankelijk karakter van een positieve en een negatieve component. Het is slechts door de restrictie tot consistente elementen binnen bitralies dat we de twee paradigma's met elkaar kunnen verzoenen.

Anderzijds zijn intervallen niet de enige mogelijke invulling die we aan het begrip onbepaaldheid kunnen geven. Het is conceptueel immers perfect mogelijk om als mogelijke waarden voor een lidmaatschapsgraad, een willekeurige deelverzameling van $[0,1]$ die niet noodzakelijk een interval is, op te geven. Voelt men behoefte aan een nog fijnere notie van onbepaaldheid, dan kan men als lidmaatschapsgraad een vaagverzameling in $[0,1]$ naar voor schuiven. Dit gebeurt in de praktijk in type-2 vaagverzamelingen, die recent aan een steile opmars bezig zijn (zie o.m. [85, 98]). Theoretisch is dat verfijnen niet aan grenzen gebonden: een type-3 vaagverzameling neemt lidmaatschapsgraden aan in $\mathcal{F}(\mathcal{F}([0,1]))$, en ga zo maar door.

Wie zei ook alweer dat er aan een concept *twee* zijden te bestuderen zijn? *Neutrosofie*, een recente stroming op het randje van filosofie en wiskunde, predikt het bestaan van *drie onafhankelijke facetten* van een concept A , namelijk een positieve, een negatieve en een onbepaalde component [116]. Montero en Gómez [102] bekijken het dan weer heel pragmatisch: in hun ogen partitioneren de

waarden $\mu_A(u)$, $\nu_A(u)$ en $\pi_A(u)$ het eenheidsinterval in drie klassen. Waarom zou men dit niet uitbreiden tot n klassen?

Resumerend kan men dus stellen dat L^* -vaagverzamelingen zich als “consistente tweezijdige modellen” bevinden op een strategisch kruispunt van een “onbepaaldheidsaanpak” en een “meerzijdige aanpak”.

Hoofdstuk 4

Hybridisering van Vaagheid en Ruwheid

Do what I *mean*, not what I *say*.
(computerjargon)

Zoals eerder al werd verduidelijkt, vertolken vaagverzamelingen en ruwverzamelingen verschillende facetten van imprecisie die elkaar eerder aanvullen dan bestrijden. Vaagruwverzamelingen zijn in die zin de gezonde nakomelingen voortspuitend uit het samengaan van twee kleurrijke, complementaire wetenschappelijke tradities. Binnen de huidige informatiemaatschappij, belichaamd door het uit zijn voegen barstende Wereld Wijde Web of WWW, lijken ze zich ook te ontpoppen tot een nuttig instrument bij het afhandelen van zoekopdrachten in grote datavolumes. Om hen toe te laten die rol ten volle uit te spelen, hebben we er baat bij om buiten de gebaande paden te treden; we onderwerpen de gangbare definities aan een kritisch onderzoek, en argumenteren o.m. dat bij het kruisbestuivingsproces het “vage zaad” (nog) niet de kans gekregen heeft om helemaal tot in de genen van het ruwverzamelingbegrip door te dringen. Een volgende stap in het hybridiseringsproces bestaat erin ook de tweezijdige extensies van vaagverzamelingen te koppelen aan het concept ruwverzameling.

4.1 Historiek

Wie vaagverzamelingen en ruwverzamelingen aan een louter vormelijk onderzoek onderwerpt, komt met de bevindingen uit Hoofdstuk 2 (zie o.m. formule (2.5)) tot de conclusie dat laatstgenoemde modellen als bijzondere wazigverzamelingen, slechts een specifiek deelgeval van de vaagverzamelingenleer uitmaken. Deze hypothese wordt ook bevestigd in de context van zogenaamde *probabilistische ruwverzamelingen* [135], waarin de ruwverzameling van een scherpe verzameling A in een Pawlak benaderingsruimte (U, R) eenduidig wordt geka-

rakteriseerd door een vaagverzameling P_A in U bepaald door, voor u in U ,

$$P_A(u) = \frac{|Ru \cap A|}{|Ru|} \quad (4.1)$$

die men *ruwlidmaatschapsfunctie* (rough membership function) noemt. Men leidt eenvoudig af dat $\underline{apr}_R(A) = \ker(P_A)$ en $\overline{apr}_R(A) = \text{supp}(P_A)$. $P_A(u)$ is ook op te vatten als de voorwaardelijke waarschijnlijkheid dat u tot A behoort, gegeven dat u tot Ru behoort. Vermits men niet voor elke vaagverzameling F in U een equivalentierelatie R over U en A in $\mathcal{P}(U)$ zo dat $F = P_A$ kan vinden [46] treedt ook uit deze benadering de vaagverzamelingenleer als het ruimere model naar voren.

Anderzijds maken sommige auteurs (zie bv. [110, 138]) zich de bedenking dat formules zoals (2.5) en (4.1) weliswaar ruwverzamelingen omzetten in vaagverzamelingen, maar dat bijvoorbeeld gegeven A, B in $\mathcal{P}(U)$ de ruwverzameling van $A \cup B$ in (U, R) niet kan worden gedistilleerd uit $P_A \cup_S P_B$, voor gelijk welke t -conorm S op $[0,1]$. Dit hangt uiteraard samen met de wetmatigheden van de waarschijnlijkheidsleer en met wat we in Opmerking 2.53 hebben opgemerkt over het bepalen van de ruwverzameling van een unie.

Wat er ook van zij, pragmatisch kun je dergelijk gekissebis bezwaarlijk noemen! Het wekt verbazing op, dat pas in een publicatie [58] uit 1990 onomwonden werd uiteengezet hoe je het gedachtengoed dat beide modellen bestrijken wél zinvol aan elkaar kunt koppelen:

- Van vaagverzamelingen kan men de onder- en bovenbenadering bepalen in een Pawlak (of veralgemeende) benaderingsruimte. Men spreekt dan over *ruwvaagverzamelingen* (rough fuzzy sets).
- De (equivalentie)relatie R over U hoeft niet noodzakelijk scherp te zijn. Gegeven een binaire vaagrelatie R over U noemen we (U, R) een *vaagbenaderingsruimte*. Binnen dit verruimde kader treden *vaagruwverzamelingen* (fuzzy rough sets) op als benaderingen voor vaagverzamelingen in U .

Vermits een scherpe (Pawlak of veralgemeende) benaderingsruimte een bijzonder geval is van een vaagbenaderingsruimte, zijn ruwvaagverzamelingen ook bijzondere vaagruwverzamelingen, zo dat we het in het vervolg enkel over laatstgenoemde objecten zullen hebben.

Voor we ons aan het concrete formaat van de veralgemening wagen, willen we kort de aandacht vestigen op een alternatieve benadering van het begrip vaagruwverzameling voorgesteld door Nanda en Majumdar [105]. Gegeven een ruwverzameling (A_1, A_2) in (U, R) verstaan deze auteurs onder een “vaagruwverzameling van (A_1, A_2) ” elk koppel (F_1, F_2) zo dat F_1 , resp. F_2 , een vaagverzameling is in A_1 , resp. A_2 , en zo dat voor elke u in A_1 , $F_1(u) \leq F_2(u)$. Los van de notationale onhandigheid (F_1 en F_2 zijn technisch gezien in verschillende universa gedefinieerd), is het duidelijk dat het voorgestelde eerder een vervaging van Gentilhommes wazigverzamelingenleer dan van de ruwverzamelingenleer is.

4.2 Onder- en Bovenbenadering in een Vaagbenaderingsruimte

De formules (2.7) en (2.8) voor de onder- en bovenbenadering van A in $\mathcal{P}(U)$ in een Pawlak benaderingsruimte (U, R) kunnen herschreven worden als [111]

$$\begin{aligned} v \in \underline{apr}_R(A) &\iff (\forall u \in U)((u, v) \in R \Rightarrow u \in A) \\ v \in \overline{apr}_R(A) &\iff (\exists u \in U)((u, v) \in R \text{ en } u \in A) \end{aligned}$$

De formules lenen zich uitstekend tot een “vervaging”, waarbij $\forall$ en $\exists$ geïnterpreteerd worden door $\inf$ en $\sup$ en de scherpe implicatie en conjunctie door een implicator en een t -norm op $[0,1]$ respectievelijk worden vervangen (herinner trouwens ook Sectie 3.3.1, waarin het verband met het direct en het superdirect beeld van A onder R wordt gelegd). In [111] wordt dit principe toegepast onder de enigszins beperkende voorwaarde dat R een similariteitsrelatie over U is, d.i. een reflexieve, symmetrische, $\min$ -transitieve¹, binaire vaagrelatie over U . In een algemene vaagbenaderingsruimte kunnen we onder- en bovenbenadering als volgt invoeren.

4.1 Definitie (Onder- en Bovenbenadering). Zij R een binaire vaagrelatie over U , A een vaagverzameling in U , T een t -norm en I een implicator op $[0,1]$. Dan verstaat men onder de onder-, resp. bovenbenadering van A in (U, R) de vaagverzamelingen $\underline{apr}_R^I(A)$, $\overline{apr}_R^T(A)$ in U , bepaald door, voor v in U ,

$$\underline{apr}_R^I(A)(v) = R \downarrow_I A(v) = \inf_{u \in U} I(R(u, v), A(u)) \quad (4.2)$$

$$\overline{apr}_R^T(A)(v) = R \uparrow_T A(v) = \sup_{u \in U} T(R(u, v), A(u)) \quad (4.3)$$

We noemen $(\underline{apr}_R^I(A), \overline{apr}_R^T(A))$ de vaagruwverzameling van A in (U, R) met t -norm T en implicator I . Het weze duidelijk dat de eigenschappen waaraan de onder- en bovenbenadering voldoen afhankelijk is van de keuze van R , T en I . Zo gaat men na (cfr. Stelling 3.47) dat

$$\overline{apr}_R^T(A) = co_N(\underline{apr}_R^I(co_N A)) \quad (4.4)$$

$$\underline{apr}_R^I(A) = co_N(\overline{apr}_R^T(co_N A)) \quad (4.5)$$

indien $I = I_T$ en $N = N_I$ involutief is. Anderzijds geldt voor reflexieve R en randimplicator I dat (cfr. Stelling 3.50)

$$\underline{apr}_R^I(A) \subseteq A \subseteq \overline{apr}_R^T(A) \quad (4.6)$$

Volgende eigenschappen gelden zonder bijkomende beperkingen (cfr. Stelling 3.43,

¹Merk op dat een $\min$ -transitieve vaagrelatie ook automatisch T -transitief is voor willekeurige t -norm T .

3.45,3.46), voor willekeurige vaagverzamelingen A en B in U .

$$A \subseteq B \Rightarrow \underline{apr}_R^I(A) \subseteq \underline{apr}_R^I(B) \quad (4.7)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{apr}_R^T(A) \subseteq \overline{apr}_R^T(B) \quad (4.8)$$

$$\underline{apr}_R^I(A \cap B) = \underline{apr}_R^I(A) \cap \underline{apr}_R^I(B) \quad (4.9)$$

$$\overline{apr}_R^T(A \cap B) \subseteq \overline{apr}_R^T(A) \cap \overline{apr}_R^T(B) \quad (4.10)$$

$$\underline{apr}_R^I(A \cup B) \supseteq \underline{apr}_R^I(A) \cup \underline{apr}_R^I(B) \quad (4.11)$$

$$\overline{apr}_R^T(A \cup B) = \overline{apr}_R^T(A) \cup \overline{apr}_R^T(B) \quad (4.12)$$

Met andere woorden, om de voornaamste eigenschappen van klassieke ruwverzamelingen te vrijwaren volstaat de reflexiviteit van R en een weloverwogen keuze van logische connectieven.

4.3 Alternatieve Benaderingsoperatoren

Het is duidelijk dat bij de opbouw van formules (4.2) en (4.3) nauwgezet de structuur van de onder- en bovenbenaderingen in een (scherpe) Pawlak benaderingsruimte is gevolgd. In het bijzonder betreft men bij het evalueren van de mate waarin v behoort tot $\underline{apr}_R^I(A)$ en $\overline{apr}_R^T(A)$ enkel diens R -voorverzameling Rv . In een Pawlak benaderingsruimte is die aanpak ingegeven door de vaststelling dat een scherpe equivalentierelatie het universum partioneert in disjuncte equivalentieklassen. Voor een vage T -equivalentierelatie valt dit houvast echter weg.

4.2 Voorbeeld. Zij $U = \{a, b\}$, en zij R de vage T -equivalentierelatie R over U bepaald door

R	a	b
a	1	0.2
b	0.2	1

Er geldt: $Ra(a) = 1$, $Ra(b) = 0.2$, $Rb(a) = 0.2$ en $Rb(b) = 1$, zo dat

$$(Ra \cap_T Rb)(a) = (Ra \cap_T Rb)(b) = 0.2$$

voor willekeurige t -norm T op $[0,1]$, Ra en Rb zijn m.a.w. niet disjunct.

4.3 Stelling. Indien R een vage T -equivalentierelatie is over U , dan geldt voor u, v in U dat

$$R(u, v) \geq \sup_{w \in U} (Ru \cap_T Rv)(w)$$

Bewijs. Onmiddellijk uit de symmetrie en de T -transitiviteit van R . $\square$

Hieruit volgt dat indien $R(u, v) = 0$, $Ru \cap_T Rv = \emptyset$, m.a.w. elementen die totaal ongerelateerd zijn hebben nog steeds disjuncte R -voorverzamelingen.

4.4 Stelling. [58] Indien R een vage T -equivalentierelatie is over U , dan geldt voor u, v in U dat

$$R(u, v) = 1 \Rightarrow Ru = Rv$$

Als gevolg van Stelling 4.4 zijn vage T -equivalentierelaties niet compatibel met de Poincaré paradox; men zegt dat een binaire vaagrelatie R over U compatibel is met de Poincaré paradox indien [46]

$$(\exists u, v, w \in U)(R(u, v) = 1 \text{ en } R(v, w) = 1 \text{ en } R(u, w) < 1) \quad (4.13)$$

Bovenstaande formule haalt haar inspiratie uit Poincaré's experimentele vaststelling dat hoewel een zakje suiker van tien gram en één van elf gram door een mens doorgaans niet van elkaar kunnen worden onderscheiden, en hetzelfde geldt voor een zakje van elf gram en één van twaalf gram, zulks niet opgaat voor een zakje van tien en één van twaalf gram. Indien we het experiment zouden willen modelleren met een vage T -equivalentierelatie R over $[0, +\infty[$, dan komen we tot de vaststelling dat uit $R(10, 11) = 1$ en $R(11, 12) = 1$ met Stelling 4.4 volgt dat $R(10, 12) = 1$, wat niet strookt met onze intuïtie. *Het is duidelijk dat T -transitiviteit in deze zaak de boosdoener is.* In [46] werd daarom gepleit om de voorwaarde niet op te leggen aan een model van benaderende gelijkheid.

Laten we het voorgaande betrekken op een vaagbenaderingsruimte (U, R) . In het algemeen kan een element v in U tot diverse R -voorverzamelingen behoren tot een verschillende graad, en dus niet enkel tot Rv . Het ligt daarom voor de hand om ook deze Ru waarvoor $R(v, u) > 0$ in rekening te brengen bij het bepalen van $\underline{apr}_R^I(A)$ en $\overline{apr}_R^T(A)$. Dit resulteert onmiddellijk in de volgende (niet-exhaustieve) lijst van kandidaat-definities voor de onder- en bovenbenadering (voor de eenvoud scherp gesteld):

1. v behoort tot de onderbenadering van A indien
 - (a) alle R -voorverzamelingen waartoe v behoort zijn bevat in A , i.e. $(\forall w \in U)(v \in Rw \Rightarrow Rw \subseteq A)$.
 - (b) ten minste één R -voorverzameling waartoe v behoort is bevat in A , i.e. $(\exists w \in U)(v \in Rw \text{ en } Rw \subseteq A)$.
 - (c) Rv is bevat in A .
2. v behoort tot de bovenbenadering van A indien
 - (a) alle R -voorverzamelingen waartoe v behoort een niet-ledige doorsnede hebben met A , i.e. $(\forall w \in U)(v \in Rw \Rightarrow Rw \cap A \neq \emptyset)$.
 - (b) ten minste één R -voorverzameling waartoe v behoort een niet-ledige doorsnede heeft met A , i.e. $(\exists w \in U)(v \in Rw \text{ en } Rw \cap A \neq \emptyset)$.
 - (c) Rv een niet-ledige doorsnede heeft met A .

Dit gedachtengoed wiskundig vertolkend belanden we bij volgende alternatieve benaderingsoperatoren, die we naast de klassieke onder- en bovenbenadering kunnen plaatsen.

4.5 Definitie (Streng en zwakke onder- en bovenbenadering). Zij R een binaire vaagrelatie over U , A een vaagverzameling in U , T een t-norm op $[0,1]$ en I een implicator op $[0,1]$.

1. De streng en zwakke onderbenadering van A in (U, R) worden gegeven door, voor v in U ,

$$(a) \quad R \downarrow_I \downarrow_I A(v) = \inf_{w \in U} I \left(R(v, w), \inf_{u \in U} I(R(u, w), A(u)) \right)$$

$$(b) \quad R \uparrow_T \downarrow_I A(v) = \sup_{w \in U} T \left(R(v, w), \inf_{u \in U} I(R(u, w), A(u)) \right)$$

2. De streng en zwakke bovenbenadering van A in (U, R) worden gegeven door, voor v in U ,

$$(a) \quad R \downarrow_I \uparrow_T A(v) = \inf_{w \in U} I \left(R(v, w), \sup_{u \in U} T(R(u, w), A(u)) \right)$$

$$(b) \quad R \uparrow_T \uparrow_T A(v) = \sup_{w \in U} T \left(R(v, w), \sup_{u \in U} T(R(u, w), A(u)) \right)$$

Het is duidelijk dat de streng en de zwakke benaderingsoperatoren zich elk aan een uiteinde van het betreffende spectrum bevinden, wat de naamkeuze verklaart. Het gebruik van $\downarrow_I$ en $\uparrow_T$ suggereert anderzijds een verband met het direct en superdirect beeld, wat in volgende eenvoudig te verifiëren stelling wordt geconcretiseerd.

4.6 Stelling. Zij T een t-norm, I een implicator op $[0,1]$. Voor elke symmetrische binaire vaagrelatie R over U en elke vaagverzameling A in U geldt

$$\begin{aligned} R \downarrow_I \downarrow_I A &= R \downarrow_I (R \downarrow_I A) \\ R \uparrow_T \downarrow_I A &= R \uparrow_T (R \downarrow_I A) \\ R \downarrow_I \uparrow_T A &= R \downarrow_I (R \uparrow_T A) \\ R \uparrow_T \uparrow_T A &= R \uparrow_T (R \uparrow_T A) \end{aligned}$$

4.7 Stelling. Zij T een t-norm, I een randimplicator op $[0,1]$. Voor elke reflexieve en symmetrische binaire vaagrelatie R over U en elke vaagverzameling A in U geldt

$$R \downarrow_I \downarrow_I A \subseteq R \downarrow_I A \subseteq A \subseteq R \uparrow_T A \subseteq R \uparrow_T \uparrow_T A$$

Bewijs. Uit Stelling 4.6 en eigenschap (4.6) van de klassieke onder- en bovenbenadering in een vaagbenaderingsruimte. $\square$

Uit (4.6), (4.7) en (4.8) en Stelling 4.6 volgt anderzijds onmiddellijk, indien R reflexief en symmetrisch en I een randimplicator is,

$$\begin{aligned} R \downarrow_I A &\subseteq R \uparrow_T \downarrow_I A \subseteq R \uparrow_T A \\ R \downarrow_I A &\subseteq R \downarrow_I \uparrow_T A \subseteq R \uparrow_T A \end{aligned}$$

maar hieruit kunnen we nog geen verband in termen van inclusie afleiden tussen de zwakke onderbenadering en de sterke bovenbenadering, en al evenmin bepalen hoe A in dit plaatje past. Mits een bijzondere keuze van de optredende connectieven schept het volgend resultaat evenwel klaarheid.

4.8 Stelling. [13] Zij T een continue t-norm op $[0, 1]$, $I = I_T$ en R een symmetrische binaire vaagrelatie over U , dan geldt voor elke A in $\mathcal{F}(U)$

$$R \uparrow_T \downarrow_I A \subseteq A \subseteq R \downarrow_I \uparrow_T A$$

Wanneer men de voorwaarden op de connectieven afzwakt, is Stelling 4.8 in het algemeen niet langer geldig, zoals volgend voorbeeld aantoont.

4.9 Voorbeeld. Zij U en R gegeven zoals in Voorbeeld 4.2, en zij A in $\mathcal{F}(U)$ zo dat $A(a) = 1$ en $A(b) = 0.8$. Zij voorts $T = T_M$ en $I = I_{S_M}$. Dan is $R \uparrow_T A(a) = 1$, $R \uparrow_T A(b) = 0.8$ en

$$R \downarrow_I \uparrow_T A(a) = \min(\max(0, 1), \max(0.8, 0.8)) = 0.8$$

waaruit $A \not\subseteq R \downarrow_I \uparrow_T A$.

Kiest men nu voor R i.h.b. een vage T -equivalentierelatie over U , dan gooien de volgende resultaten (cfr. Stelling 3.51 en 3.52) roet in het eten, daar het beoogde onderscheid tussen de zwakke, strenge en klassieke onderbenadering (bovenbenadering) erdoor komt te vervallen.

4.10 Stelling. [111] Zij T een continue t-norm op $[0, 1]$ en R een vage T -equivalentierelatie over U . Indien I een randimplicator op $[0, 1]$ is zo dat voldaan is aan² $I(T(x, y), z) \leq I(x, I(y, z))$ voor x, y, z in $[0, 1]$, dan geldt voor elke A in $\mathcal{F}(U)$

$$\begin{aligned} R \uparrow_T \uparrow_T A &= R \uparrow_T A \\ R \downarrow_I \downarrow_I A &= R \downarrow_I A \end{aligned}$$

4.11 Stelling. [13, 111] Zij T een continue t-norm op $[0, 1]$, $I = I_T$ en R een vage T -equivalentierelatie over U , dan geldt voor elke A in $\mathcal{F}(U)$

$$\begin{aligned} R \uparrow_T \downarrow_I A &= R \downarrow_I A \\ R \uparrow_I \uparrow_T A &= R \uparrow_T A \end{aligned}$$

²Merk op dat dit i.h.b. geldt wanneer $I = I_T$.

Omgekeerd betekent het opgeven van T -transitiviteit ook het opgeven van bovenstaande gelijkheden, zoals volgend voorbeeld aantoont.

4.12 Voorbeeld. Zij T een willekeurige t -norm op $[0, 1]$ en A in $\mathcal{F}([0, 1])$ gedefinieerd als $A(u) = u$, voor elke u in $[0, 1]$. Zij voorts R de binaire vaagrelatie over $[0, 1]$ bepaald door, voor u, v in $[0, 1]$,

$$R(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{als } |u - v| < 0.1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Dan is R reflexief en symmetrisch, maar niet T -transitief. Men gaat na dat voor een willekeurige randimplicator I geldt, voor v in $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} R \downarrow_I A(v) &= \inf_{u \in [0, 1]} I(R(u, v), A(u)) \\ &= \inf\{u \mid u \in [0, 1] \text{ en } u \in]v - 0.1, v + 0.1[\} \\ &= \max(0, v - 0.1) \\ R \uparrow_T A(v) &= \sup_{u \in [0, 1]} T(R(u, v), A(u)) \\ &= \sup\{u \mid u \in [0, 1] \text{ en } u \in]v - 0.1, v + 0.1[\} \\ &= \min(1, v + 0.1) \end{aligned}$$

Dan is bijvoorbeeld $R \downarrow_I A(0.95) = 0.85$. Anderzijds geldt

$$\begin{aligned} R \downarrow_I \downarrow_I A(0.95) &= \inf_{u \in [0, 1]} I(R(u, 0.95), \max(0, u - 0.1)) \\ &= \inf\{\max(0, u - 0.1) \mid u \in]0.85, 1[\} = 0.75 \\ R \uparrow_T \downarrow_I A(0.95) &= \sup_{u \in [0, 1]} T(R(u, 0.95), \max(0, u - 0.1)) \\ &= \sup\{\max(0, u - 0.1) \mid u \in]0.85, 1[\} = 0.9 \end{aligned}$$

wat aantoont dat $R \downarrow_I \downarrow_I A \neq R \downarrow_I A$ en $R \uparrow_T \downarrow_I A \neq R \downarrow_I A$. Analoog vindt men ook dat, terwijl $R \uparrow_T A(0.05) = 0.15$,

$$\begin{aligned} R \uparrow_T \uparrow_T A(0.05) &= \sup_{u \in [0, 1]} T(R(u, 0.05), \min(1, u + 0.1)) \\ &= \sup\{\min(1, u + 0.1) \mid u \in [0, 0.15[\} = 0.25 \\ R \downarrow_I \uparrow_T A(0.05) &= \inf_{u \in [0, 1]} I(R(u, 0.05), \min(1, u + 0.1)) \\ &= \inf\{\min(1, u + 0.1) \mid u \in [0, 0.15[\} = 0.1 \end{aligned}$$

en dus geldt noch $R \uparrow_T \uparrow_T A = R \uparrow_T A$, noch $R \downarrow_I \uparrow_T A = R \uparrow_T A$.

Merk op dat Stelling 4.10 en 4.11 in feite ook betekenen dat, voor een vage T -equivalentierelatie, de klassieke onder- en bovenbenaderingen $\underline{apr}_R^I(A)$ en $\overline{apr}_R^T(A)$ definieerbare vaagverzamelingen zijn (cfr. Sectie 2.2.3). In die zin wordt, door de T -transitiviteit en door de juiste keuze van connectieven, het “defect” dat R -voorverzamelingen niet noodzakelijk disjunct zijn, onschadelijk

gemaakt, en erven dergelijke vaagruwverzamelingen goeddeels het gedrag van klassieke Pawlak ruwverzamelingen.

Anderzijds is dit fenomeen ook enigszins verontrustend: het feit dat een gegeven element in verschillende mates tot verschillende voorverzamelingen kan behoren, wat toch één van de kernpunten in de vaagverzamelingenleer raakt, verdwijnt erdoor volledig in het georkestreerd samenspel van operatoren, en reduceert interessante pistes zoals het nemen van de sterke bovenbenadering en de zwakke onderbenadering (die elk een zekere nuancering aan de klassieke benaderingsoperatoren toevoegen) tot trivialiteit.

Dit, samen met andere intuïtieve argumenten tegen het gebruik van T -transitiviteit bij het modelleren van benaderende gelijkheid zoals de Poincaré paradox, pleit ervoor om binnen de vaagruwverzamelingenleer de blik te verruimen tot meer algemene vaagbenaderingsruimten. In de volgende sectie illustreren we de kracht van dit gedachtengoed aan de hand van een reeks concrete informatieverwerkingsprocessen.

4.4 Toepassingen van Vaagruwverzamelingen

Het gebruik van vaagruwverzamelingen in praktische toepassingen staat nog relatief in de kinderschoenen, alhoewel in de literatuur reeds een aantal voorbeelden van wat men *vaag-ruw hybridisering* (fuzzy-rough hybridization) noemt te vinden zijn. Voor een overzicht verwijzen we naar [92].

Bij wijze van illustratie bekijken we in deze paragraaf beknopt het nut van vaagruwverzamelingen in twee domeinen: eerst keren we terug naar de “bron” van het ruwverzamelingenonderzoek, nl. de analyse en classificatie van objecten in datatabellen, en daarna gaan we na in welke mate de (alternatieve) benaderingsoperatoren geïntroduceerd in Definitie 4.5 kunnen bijdragen tot een efficiënter zoekproces doorheen grote gegevensvolumes zoals het WWW.

4.4.1 Toepassing in Datatabellen

In de context van datatabellen heeft het gebruik van een vaagrelatie i.p.v. een scherpe (equivalentie)relatie een belangrijk semantisch voordeel. Denk bv. terug aan Tabel 2.4 die gegevens over generatiestudenten bevat. Om het aantal equivalentieklassen binnen de perken te houden hebben we voor de attributen RW en RG niet de exacte studieresultaten opgenomen, maar geven we slechts aan tot welk van de intervallen $[0, 10[, \dots, [90, 100]$ ze behoren. In deze aanpak valt iemand met een resultaat van 79,9% onvermijdelijk in de klasse $[70, 80[$, en iemand met 80,1% in $[80, 90[$, hoewel beide op verwaarloosbare afstand van elkaar liggen, en nagenoeg even dicht bij het centrum van het interval $[70, 80[$ als bij dat van $[80, 90[$. Dergelijke abrupte overgang kan worden vermeden door toe te laten dat de relatie tussen twee percentages afneemt naarmate ze meer van elkaar verschillen, m.a.w. door de introductie van een vaagrelatie R die benaderende gelijkheid modelleert.

	DIPL	UW	RW	RG	RKI
d_1	Wetenschappen–Wiskunde	8	73.6	79.4	72.0
d_2	Latijn–Wiskunde	8	69.1	72.4	63.4
d_3	Moderne Talen–Wiskunde	6	71.4	66.7	65.1
d_4	Moderne Talen–Wiskunde	6	70.4	62.2	55.6
d_5	Latijn–Wiskunde	8	91.1	87.8	81.6
d_6	Wetenschappen–Wiskunde	8	60.1	71.2	53.0
d_7	Moderne Talen–Wiskunde	6	74.2	82.1	66.2
d_8	Moderne Talen–Wiskunde	6	71.2	63.1	50.5

Tabel 4.1: Generatiestudenten Informatica.

In het algemeen, zij $I = \{I_1, \dots, I_n\}$, $n > 0$, de attributen van een gegeven datatabel en $D = \{d_1, \dots, d_m\}$, $m > 0$, de datarecords. De waarde van het i^e record voor het j^e attribuut wordt gegeven door $d_i[I_j]$. Indien we veronderstellen dat voor elk attribuut I_j ($j = 1, \dots, n$) een vaagrelatie R_j is gegeven over het domein U_j van I_j zo dat voor u, v in U_j , $R_j(u, v)$ de mate van gelijkheid tussen u en v uitdrukt, dan kan men een binaire vaagrelatie over D bepalen als, voor d_k, d_l in D ,

$$R(d_k, d_l) = T(R_1(d_k[I_1], d_l[I_1]), \dots, R_n(d_k[I_n], d_l[I_n]))$$

waarbij T een t-norm is³.

4.13 Voorbeeld. We hernemen in Tabel 4.1 de gegevens uit Tabel 2.4, deze keer met de exacte numerieke waarden voor de behaalde resultaten RW, RG en RKI. Om percentages te vergelijken maken we gebruik van de relatie R_c geïntroduceerd in Voorbeeld 3.49, met $c = 50$, m.a.w. we definiëren vaagrelaties R_{RW} , R_{RG} en R_{RKI} als, voor u, v in $[0, 100]$,

$$R_{RW}(u, v) = R_{RG}(u, v) = R_{RKI}(u, v) = R_{50}(u, v) = \max\left(0, 1 - \frac{|u - v|}{50}\right)$$

Voor de resterende attributen blijven we nog steeds een beroep doen op de klassieke gelijkheidsrelatie om waarden te vergelijken. De mate van gelijkheid tussen bv. studenten d_7 en d_8 , op grond van de conditionele attributen, is dan gegeven door (stel $T = T_W$)

$$R(d_7, d_8) = T_W(1, 1, R_{50}(74.2, 71.2), R_{50}(82.1, 63.1)) = T_W(0.94, 0.62) = 0.56$$

Onderstaande tabel geeft voor elk koppel studenten de mate van gelijkheid m.b.t. R :

³of meer algemeen: een n -aire vaaglogische aggregatie-operator

R	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
d_1	1	0	0	0	0	0.57	0	0
d_2	0	1	0	0	0.25	0	0	0
d_3	0	0	1	0.89	0	0	0.64	0.92
d_4	0	0	0.89	1	0	0	0.53	0.97
d_5	0	0.25	0	0	1	0	0	0
d_6	0.57	0	0	0	0	1	0	0
d_7	0	0	0.64	0.53	0	0	1	0.56
d_8	0	0	0.92	0.97	0	0	0.56	1

Stel dat we nu zoals in het scherpe geval de onder- en bovenbenadering wensen te bepalen van de studenten die geslaagd zijn, waarbij we “geslaagd” (rekening houdend met factoren zoals deliberatie) nu als een imprecies begrip opvatten, bepaald door de lidmaatschapsfunctie, voor u in $[0, 100]$,

$$geslaagd(u) = \begin{cases} 1 & \text{indien } u > 60 \\ R_{10}(60, u) & \text{anders} \end{cases}$$

Onder A verstaan we de vaagverzameling in $\{d_1, \dots, d_8\}$ waarvoor $A(d_i) = geslaagd(d_i[RKI])$, $i = 1, \dots, 8$. Voor de keuze $T = T_W$ en $I = I_{S_W}$ bekomen we voor bv. student d_4 het lidmaatschap in de boven- en onderbenadering als

$$\overline{apr}_R^T(A)(d_4) = \max_{i=1}^8 T_W(R(d_i, d_4), A(d_i)) = \max(0.56, 0.89, 0.64, 0) = 0.89$$

$$\underline{apr}_R^I(A)(d_4) = \min_{i=1}^8 I_W(R(d_i, d_4), A(d_i)) = \min(0.56, 0.08, 1) = 0.08$$

In het algemeen luiden de resultaten:

	$\overline{apr}_R^T(A)$	$\underline{apr}_R^I(A)$
d_1	1	0.73
d_2	1	1
d_3	1	0.13
d_4	0.89	0.08
d_5	1	1
d_6	0.89	0.3
d_7	1	0.49
d_8	0.92	0.05

Bovenstaande resultaten geven een genuanceerder beeld dan in het scherpe geval. Zo behoort d_1 slechts in de mate 0.73 tot de onderbenadering van “geslaagd”, daar d_1 qua voorgeschiedenis een zekere gelijkenis met de waarschijnlijk niet-geslaagde student d_6 vertoont. Wanneer grote hoeveelheden dergelijke gegevens beschikbaar zijn, kan men deze informatie gebruiken om aan nieuwe studenten een advies te verstrekken. Het is ook mogelijk het voorbeeld uit te breiden zo dat bijvoorbeeld ook de mate van gelijkenis tussen twee studierichtingen in rekening wordt gebracht.

Merk anderzijds op dat ook de tweevoudige vaagverzamelingen uit Sectie 2.2.4 netjes passen in de puzzel van onder- en bovenbenaderingen. Wanneer we zoals in het scherpe geval de stap naar veralgemeende vaagruwverzamelingen zetten (we laten de voor de hand liggende details hier achterwege), kunnen de formules (2.14) en (2.15) voor het inwendige en de sluiting van A in $\mathcal{F}(V)$ immers gezien worden als het nemen van het superdirect en het direct beeld a.d.h.v. de implicator I_{S_M} en de t -norm T_M op $[0,1]$ van A onder de vaagrelatie R van V naar U , gegeven door, voor (u, v) in $U \times V$, $R(v, u) = \pi_{X_u}(v)$. De bijzondere keuze van connectieven wordt gedicteerd door de possibiliteitsleer, maar naar de praktijk lijkt het ook zinvol om meer keuzevrijheid, i.e. willekeurige t -norm en implicator, toe te laten.

4.4.2 Toepassing in Intelligente Informatie–Ophaling

Om efficiënt de immense zoekruimte van het WWW te kunnen exploreren, maken *zoekmachines* (search engines) zoals Google en Yahoo gebruik van *sleutelwoorden* (keywords). Om een zoekopdracht te lanceren, tikt de gebruiker het onderwerp van zijn of haar keuze (de zoekstring) in, waarna de zoekmachine antwoordt met een volgens relevantie gerangschikte lijst van webdocumenten die beantwoorden aan de vraag. Hetzelfde procédé vindt men ook vaak terug in de context van elektronische handel (*e-commerce*): de toepassingssoftware tracht de vraag van een klant te relateren aan producten uit de verkoopscatalogus van een bedrijf.

Typisch wordt het zoekproces geïmplementeerd op basis van een geïndexeerde lijst waarin het verband tussen sleutelwoorden en documenten bijgehouden wordt (zie bv. [99]). Conceptueel kan men dergelijke index zien als bepaald door een vaagrelatie Q die met elk document d in $\mathbb{D}$ de documenten t in $\mathbb{T}$ laat overeenstemmen die relevant zijn voor d (bijvoorbeeld in de mate van hun voorkomen in d) en vice versa. Het zoekresultaat B in $\mathcal{F}(\mathbb{D})$, gegeven een vaagverzameling A in $\mathbb{T}$ wordt dan bepaald door het direct beeld van A te nemen onder Q , i.e. voor d in $\mathbb{D}$,

$$B(d) = Q \uparrow_T A(d) = \sup_{t \in \mathbb{T}} T(Q(t, d), A(t)) \quad (4.14)$$

gegeven een t -norm T . Het resultaat bevat de documenten die min of meer relevant zijn voor minstens één van de opgegeven sleutelwoorden.

4.14 Opmerking. In feite wordt het zoekresultaat dus formeel bepaald als de (veralgemeende) sluiting of bovenbenadering van A onder de “possibiliteitsdistributie” π_{X_d} gegeven als $\pi_{X_d}(t) = Q(t, d)$, voor (t, d) in $\mathbb{T} \times \mathbb{D}$. Men kan uiteraard analoog ook het inwendige of de onderbenadering van A bepalen als $Q \downarrow_I A$ voor een implicator I , wat neerkomt op het zoeken naar documenten die *enkel* termen bevatten die ook in A voorkomen. Zulke documenten zijn, als ze bestaan, uiteraard het meest relevant voor de gebruiker.

Naar de praktijk toe zijn aan de functionaliteit van de huidige zoekmachines een aantal beperkingen verbonden. Los van het feit dat ze nagenoeg allemaal

tekstgebaseerd zijn (ze kunnen dus bv. niet op zoek gaan naar geluidsmateriaal dat lijkt op een melodietje dat de gebruiker neuriet), missen zij vaak een deel van de buit door de opgegeven sleutelwoorden als absolute en losstaande entiteiten te beschouwen: zo verwacht bijvoorbeeld wie “reisverhalen Midden–Oosten” als algemeen thema in een elektronische boekhandel opgeeft ook publicaties te zien die niet de exact opgegeven woordcombinatie in hun titel en/of beschrijving bevatten, maar er inhoudelijk wel mee te maken hebben.

Een mogelijke manier om aan dergelijke gebreken te verhelpen bestaat erin de oorspronkelijke zoekstring te *expanderen* met synoniemen, met meer specifieke of meer algemene termen, ... Bij dit proces doet men een beroep op vaagthesauri [47, 99]: binaire vaagrelaties R over $\mathbb{T}$ die verwantschap tussen termen modelleren. Gegeven A in $\mathcal{F}(\mathbb{T})$ wordt het resultaat A^e van de expansie gegeven door, voor t in $\mathbb{T}$,

$$A^e(t) = R \uparrow_T A(t) = \sup_{t' \in \mathbb{T}} T(R(t', t), A(t')) \quad (4.15)$$

Dus, een term wordt toegevoegd aan de zoekstring zodra hij min of meer verwant is aan één van de oorspronkelijke sleutelwoorden. Het is handig om dergelijke manipulatie van de zoekopdracht op te vatten als een stapsgewijze onderneming, waarbij met elke stap de gebruiker dichterbij de door hem of haar gewenste informatie. Merk op dat een T –transitieve relatie in die zin een beperking inhoudt, gezien gelet op Stelling 4.10 steeds $R \uparrow_T (R \uparrow_T A) = R \uparrow_T A$, en de geëxpandeerde zoekstring reeds na één stap niet meer wijzigt.

Een mogelijke valkuil in de voorgaande strategie bestaat erin dat het uitbreiden met verwante termen de zoekopdracht laat “exploderen”.

4.15 Voorbeeld. Vergelijk de zoekstrings “logistiek goederen expeditie” en “reizen avontuur expeditie”. Voor een menselijke waarnemer is het evident dat in het eerste geval onder “expeditie” iets heel anders verstaan wordt dan in het tweede geval, maar een zoekmachine beschikt doorgaans niet over die achtergrondkennis. Men kan daarom verwachten dat formule (4.15) een aantal irrelevante termen aan de zoekstring toevoegt, zoals “ontdekkingstocht” in het eerste geval of “verzending” in het tweede geval, wat voor gevaar inhoudt dat in het zoekproces (a.d.h.v. formule (4.14)) de “kern”, i.e. datgene wat de gebruiker *bedoelt* met de zoekopdracht, verloren geraakt in een vloedgolf aan niet ter zake doende documenten.

De oorzaak voor bovenstaand probleem lijkt te liggen bij de al te liberale opstelling van de bovenbenadering, die een nieuwe term reeds toevoegt aan de zoekstring zodra hij verband houdt met minstens één van de sleutelwoorden. Eventueel kan men de gebruiker zelf ook een sturende rol laten spelen in dit verfijningsproces, door hem voor elke nieuw gegenereerde term te raadplegen omtrent het al dan niet toevoegen van die term aan de zoekstring.

Het ware natuurlijk mooier indien het één en het ander automatisch zou kunnen gebeuren, en de gebruiker zo min mogelijk de interne keuken binnen-geloodst hoeft te worden. Een alternatieve, meer stricte aanpak bestaat erin, een term slechts op te nemen *wanneer alle termen waarmee hij verband houdt*

zelf ook verwant zijn aan termen in de zoekstring, m.a.w. door het nemen van de strenge onderbenadering van de zoekstring A onder R . Als we voor de eenvoud aannemen dat de gebruikte vaagthesaurus R symmetrisch is, dan komt wegens Stelling 4.6 $R \downarrow_I \uparrow_T A$ overeen met $R \downarrow_I (R \uparrow_T A)$, m.a.w. eerst wordt de bovenbenadering van de zoekstring genomen en daarna worden de termen geëlimineerd die ook nog eens verwant zijn met andere termen die niet reeds in deze bovenbenadering voorkomen.

Merk op dat we op deze manier eigenlijk een soort van sluiting construeren rond de “kern” van de zoekstring; de verwachting is dat termen die voldoende relevant zijn, en dus verband houden met de meeste sleutelwoorden in A , een min of meer besloten context gaan vormen voor de zoekopdracht met weinig of geen links naar de buitenwereld, terwijl een term die slechts met één van de sleutelwoorden verwant is in het algemeen ook nog veel schakels naar andere termen buiten $R \uparrow_T A$ bezit, en als dusdanig door de onderbenadering uit de zoekstring wordt gesnoeid. Volgend voorbeeld illustreert het principe.

4.16 Voorbeeld. We harnemen de gegevens uit Voorbeeld 4.15 waarbij we voor de eenvoud aannemen dat het universum van termen beperkt is tot $\mathbb{T} = \{t_1 = \text{logistiek}, t_2 = \text{goederen}, t_3 = \text{expeditie}, t_4 = \text{reizen}, t_5 = \text{avontuur}, t_6 = \text{verzending}, t_7 = \text{ontdekkingstocht}, t_8 = \text{transport}, t_9 = \text{traffiek}, t_{10} = \text{handel}\}$. De symmetrische vaagthesaurus R wordt gegeven als

R	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
t_1	1	0.5	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.5	0.9
t_2	0.5	1	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.6	1
t_3	0.5	0.5	1	0.5	0.5	1	1	0.2	0.2	0
t_4	0	0	0.5	1	0.7	0	0.5	0	0	0.2
t_5	0	0	0.5	0.7	1	0	0.7	0	0	0
t_6	0.5	0.5	1	0	0	1	0	0.4	0.5	0.7
t_7	0	0	1	0.5	0.7	0	1	0	0	0
t_8	0.5	0.5	0.2	0	0	0.4	0	1	0.7	0.6
t_9	0.5	0.6	0.2	0	0	0.5	0	0.7	1	0.8
t_{10}	0.9	1	0	0	0	0.7	0	0.6	0.8	1

Gegeven de zoekstring $A = \{\text{reizen}, \text{avontuur}, \text{expeditie}\}$ wordt het lidmaatschap van elke term in de klassieke en de strenge bovenbenadering $R \uparrow_T A$ en $R \downarrow_I \uparrow_T A$ gegeven door $(T = T_W, I = I_{S_W})$

	$R \uparrow_T A$	$R \downarrow_I \uparrow_T A$
t_1	0.5	0.1
t_2	0.5	0.1
t_3	1	1
t_4	1	1
t_5	1	1
t_6	1	0.3
t_7	1	1
t_8	0.2	0.2
t_9	0.2	0.2
t_{10}	0	0

“logistiek”, “goederen” en “verzending” boeten door de strenge bovenbenadering in aan sterkte omdat ze verwant ze zijn aan een term als “handel”, die met geen enkel sleutelwoord uit de oorspronkelijke zoekstring verband houdt. Merk ook op dat wegens Stelling 4.8, $A \subseteq R \downarrow_I \uparrow_T A$, dus met dit procédé gaan geen termen verloren uit de oorspronkelijke zoekstring.

4.17 Opmerking. Bovenstaand voorbeeld vertrekt uiteraard van een sterk vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Los van het probleem van het opstellen van de vaagthesaurus (enkele constructiemethoden worden besproken in [47]), moet ook rekening gehouden worden met het compromisloze karakter van het infimum in de formule voor de strenge bovenbenadering. Echter, wanneer men er zich van vergewist dat

$$\begin{aligned}
 R \downarrow_I \uparrow_T A(v) &= \inf_{w \in U} I \left(R(v, w), \sup_{u \in U} T(R(u, w), A(u)) \right) \\
 &= INC_I(vR, R \uparrow_T A)
 \end{aligned}$$

met $INC_I(A, B) = \inf_{u \in U} I(A(u), B(u))$ voor A, B in $\mathcal{F}(U)$, en dus de strenge bovenbenadering in feite de mate van inclusie van de R -naverzameling van v in $R \uparrow_T A$ meet, ligt, gelet op Sectie 3.2.2, de weg open voor het gebruik van alternatieve, meer compenserende inclusiematen in de definitie van de bovenbenadering.

4.5 L^* -Vaagruwverzamelingen

We hebben eerder reeds opgemerkt dat intuïtief aan ruwverzamelingenleer twee types lidmaatschap zijn verbonden: behoort een element tot de onderbenadering (bovenbenadering) van A , dan spreekt Pawlak [109] van sterk (zwak) lidmaatschap tot (het concept bepaald door) A . Dit idee blijft uiteraard geldig binnen de vaagruwverzamelingenleer: zo is bijvoorbeeld de sterke lidmaatschapsfunctie van A de lidmaatschapsfunctie van haar onderbenadering. Het is niet moeilijk na te gaan dat beide distributies eenduidig een IWV, en dus een L^* -vaagverzameling bepalen [26].

De L^* -vaagverzamelingenleer en de vaagruwverzamelingenleer zijn dus zowel syntactisch als semantisch erg nauw aan elkaar gelinkt. Net zoals dit het

geval was voor ruwverzamelingen en wazigverzamelingen, bieden vaagruwverzamelingen een rigoureuus en theoretisch gestoeld constructiemechanisme voor L^* -vaagverzamelingen.

Een uitdaging van een andere orde doet zich voor wanneer de invoer die een kennisgebaseerd systeem te verwerken krijgt zelf tweezijdig is, of wanneer zich onbepaaldheden voordoen in het bepalen van de benaderingsrelatie. Gelet op wat voorafging is het perfect mogelijk om de definities voor de klassieke en alternatieve onder- en bovenbenadering uit te breiden tot een L^* -vaagverzameling A onder een L^* -vaagrelatie R . Zo werd in [30] o.m. reeds het bijzondere geval waarbij R een L^* -vage $\mathcal{T}$ -equivalentierelatie is onderzocht. We laten de details, die eenvoudig kunnen worden gereconstrueerd uit Sectie 3.3.2, achterwege.

Hoofdstuk 5

Regelgebaseerde Systemen

From causes which appear similar we expect similar effects.
This is the sum of all our experimental conclusions.
(David Hume)

In dit hoofdstuk wordt de brug geslagen tussen de voorstelling enerzijds en de verwerking anderzijds van imprecisie in de context van de vaagverzamelingsleer. Naast “feitelijke” kennis formaliseren we nu ook wet- en regelmatigheden, en dit aan de hand van (diverse types van) vaagregels. Uitgaande van het generieke patroon van de Veralgemeende Modus Ponens ontwikkelen we een efficiënt doch expressief kwantitatief model van benaderend redeneren, waarin we “het beste van verschillende werelden” met elkaar pogen te verzoenen.

Ook hier weer maakt ons aanknopingspunt van tweezijdigheid de orde van de dag uit: op het niveau van de verwerking van informatie loont het immers een onderscheid te maken tussen *positieve* of geobserveerde (“gegarandeerde”) regels enerzijds, en *negatieve* of beperkende regels die bepaalde restricties aan de veranderlijken in een systeem opleggen anderzijds; elk dragen ze hun steentje bij tot het inferentieresultaat, dat onder bepaalde voorwaarden een intervalwaardige vaagverzameling vormt. Dit idee, dat we in eerste instantie ontwikkelen vanuit de possibiliteitsleer, beantwoordt aan een recente trend die een helder licht laat stralen op de semantiek van het redeneerproces, en die vermag enkele misverstanden omtrent de klassieke inferentiemethodes op te klaren en hun gebreken bij te stellen.

Op het vlak van de complexiteit van de afleidingsalgoritmen, nog steeds een heikel punt in de verspreiding van vaagexpertsystemen die er gebruik van maken, onderzoeken we in een tweede gedeelte het potentieel van inclusiegebaseerd redeneren, dat zich terzelfder tijd opwerpt als een heel efficiënte benaderingstechniek voor de “exacte” methodes uit het eerste gedeelte, en als een concrete en semantisch zeer aantrekkelijke invulling van het begrip “redeneren door analogie”.

5.1 Grondslagen van Benaderend Redeneren

5.1.1 Karakterschets

Inferentie wordt vaak omschreven als een procedure voor het automatisch afleiden van nieuwe informatie uit bestaande op grond van formele deductieregels. Dergelijke afleidingsprocessen worden gerealiseerd in softwaretoepassingen die men *expert- of regelgebaseerde systemen* noemt; laatstgenoemde term huldigt het gebruik van ALS-DAN regels (*if-then rules*) als hét formaat bij uitstek voor het vastleggen van generieke kennis, i.h.b. van verbanden tussen veranderlijken X en Y in een systeem. Typisch is zo'n regel van de vorm

$$\text{ALS } X \text{ is } A \text{ DAN } Y \text{ is } B$$

waarbij A en B nader te bepalen “karakteristieken” zijn waarmee de veranderlijken al dan niet kunnen mee in overeenstemming zijn. Een voorbeeld uit een medische context is: “als een patiënt de symptomen koorts, hoofdpijn, spierpijn en koude rillingen vertoont, dan is de diagnose griep plausibel”. Naast de regels, die worden gegroepeerd in een *regelverzameling*, onderscheidt men ook *feitelijke* of specifieke kennis omtrent de veranderlijken, dit zijn stukjes informatie van de vorm

$$X \text{ is } A'$$

die onze huidige, waargenomen kennis omtrent X weergeven; ze worden opgeslagen in de *gegevensbank*. Gegeven een dergelijke waarneming over X gaat het inferentiemechanisme de toepasbaarheid van elk van de regels na. Een klassiek of tweewaardig expertsysteem “lanceert” de regel “ALS X is A DAN Y is B ” enkel wanneer de waarneming exact overeenstemt met het antecedent van de regel, m.a.w. indien $A' = A$, en voegt bij wijze van resultaat het feit

$$Y \text{ is } B$$

m.a.w., het consequent van de regel, toe aan de kennisbank. Een dergelijke aanpak, die gestoeld is op de *modus ponens*, m.a.w. op één van de pijlers van de klassieke logica, leidt echter al gauw tot een onoverbrugbare kloof met de werkelijkheid.

5.1 Voorbeeld. Beschouw de uitspraak “Als het badwater te heet is, dan verbrand ik mezelf”, die iedereen aan zijn of haar ervaring kan toetsen. Willen we dergelijke kennis integreren binnen een expertsysteem (bv. in een intelligente thermostaat), dan is een eensluidende definitie vereist van het begrip “te heet badwater”. De eenvoudigste oplossing bestaat erin, een drempelwaarde (bv. 42°C) naar voor te schuiven, maar hierdoor wordt de betekenis van de oorspronkelijke regel op minstens twee vlakken geschaad:

- Wat de ene persoon ervaart als “lauw” is mogelijk voor een ander reeds “veel te heet”. Aan dergelijk tekort kan enigszins worden verholpen door met elke gebruiker een persoonlijke drempelwaarde te associëren.

- Het *gradueel* verband dat in de regel vervat zit (met name: hoe hoger de temperatuur, hoe groter de kans op brandwonden) gaat erdoor verloren. Eventueel kan men beroep doen op een collectie van ALS–DAN regels waarbij voor verschillende drempeltemperaturen verschillende waarschuwingen worden gegenereerd. Het is echter duidelijk dat het gebruik van de modus ponens aan de afleidingen een abrupt, “alles–of–niets” karakter geeft, en dat er van een vloeiende overgang tussen de diverse fasen geen sprake is.

Bovenstaand voorbeeld illustreert hoe een voor mensen nochtans eenvoudig probleem zich niettemin moeilijk in scherpe regels laat vastleggen; wanneer men zich concentreert op de precieze details lijkt zich een raderwerk aan onverwachte complicaties te onttollen. Op grond van dergelijke vaststellingen formuleerde Zadeh het *principe van incompatibiliteit* [142]:

“As the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behavior diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics.”

Om een machine menselijk gedrag te laten emuleren dienen we haar abstractie te laten maken van overbodige details (die enkel de complexiteit, maar niet de performantie, de hoogte in kunnen stuwen) en zich in de eerste plaats te laten concentreren op informatiegranules: dit zijn computationeel handelbare en betekenisvolle symbolische entiteiten die de ingrediënten van het gegeven probleem voorstellen. Benaderend redeneren, door Zadeh voorgesteld in 1973, is in die zin ontstaan vanuit de behoefte om computers toe te laten “*to cope with problems which are too complex for exact solution but which do not require a high degree of precision*” [144].

Veralgemeende Modus Ponens

Als informatiegranules had Zadeh vaagverzamelingen voor ogen, waarmee hij gestalte gaf aan *elastische restricties* (fuzzy restrictions, zie ook Sectie 2.2.4) die niet alleen feitelijke informatie van de vorm “ X is A ” en “ Y is B ” kunnen uitdrukken (met A en B vaagverzamelingen in U en V , de respectieve universa van X en Y) maar ook ALS–DAN regels: zo modelleerde Zadeh de regel “ALS X is A DAN Y is B ”, die we vanaf nu ook een *vaagregel* zullen noemen, door middel van een vaagrelatie R tussen U en V bepaald door, voor (u, v) in $U \times V$,

$$R(u, v) = I_{S_W}(A(u), B(v)) = \min(1, 1 - A(u) + B(v)) \quad (5.1)$$

of ook door

$$R(u, v) = T_M(A(u), B(v)) = \min(A(u), B(v)) \quad (5.2)$$

Merk op hoe zich in de formules (5.1) en (5.2) in feite twee verschillende visies op de gegeven regel profileren: in de eerste formule verwijst de Lukasiewicz implicator uitdrukkelijk naar het formeel–logisch formaat van een deductieregel, terwijl

het minimum in de tweede formule vooral het samen voorkomen van X -waarden die behoren tot A en Y -waarden die behoren tot B benadrukt. Later werd in de literatuur in formule (5.1) I_{S_w} door een willekeurige implicator vervangen, en het minimum in (5.2) door een willekeurige t -norm; op die manier bekomt men het *implicatiegebaseerd*, resp. *conjunctiegebaseerd* model van vaaginferentie waar we verderop in dit hoofdstuk nog uitvoerig op terugkomen.

Het meest baanbrekende aan Zadehs ideeën was echter zonder twijfel de introductie van de *Veralgemeende Modus Ponens* (VMP), een inferentieschema van de gedaante (A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$)

$$\frac{\text{ALS } \begin{array}{l} X \text{ is } A, \text{ DAN } Y \text{ is } B \\ X \text{ is } A' \end{array}}{Y \text{ is } B'}$$

waarbij de waarneming A' niet noodzakelijk hoeft samen te vallen met A om een zinvolle afleiding B' (die zelf ook kan verschillen van B) omtrent Y te bekomen. Om dergelijke afleiding te realiseren ontwikkelde hij een vernuftig wiskundig apparaat voor de verwerking van elastische restricties [144] dat hem in staat stelde om de conclusie B' te berekenen als, voor v in V ,

$$B'(v) = \sup_{u \in U} \min(A'(u), R(u, v)) \quad (5.3)$$

waarbij opnieuw het minimum later in de literatuur werd veralgemeend tot een willekeurige t -norm, hetzij

$$B'(v) = \sup_{u \in U} T(A'(u), R(u, v)) \quad (5.4)$$

Zadeh gaf aan deze inferentiemethode de naam *Compositieregel voor Inferentie* (CRI), verwijzend naar het feit dat het resultaat ontstaat door de “compositie” van de vaagverzameling A' en de vaagrelatie R (in feite het direct beeld $R \uparrow_T A'$ van A' onder R) te nemen. Zonder hier in details¹ te willen treden, kunnen we in Zadehs methode drie belangrijke stappen onderscheiden:

1. *Cilindrische extensie*: de vaagverzameling A' in U wordt (conceptueel) uitgebreid tot $\overline{A'}$ in $\mathcal{F}(U \times V)$, gegeven als, voor (u, v) in $U \times V$,

$$\overline{A'}(u, v) = A'(u)$$

2. *Combinatie*: de doorsnede van $\overline{A'}$ met R wordt berekend: $\overline{A'} \cap R$ (cfr. min in (5.3)) of $\overline{A'} \cap_T R$ (cfr. T in (5.4)).

¹In feite bestrijkt de CRI als inferentiemechanisme een veel ruimer toepassingsgebied dan enkel regelgebaseerde systemen, maar laat d.m.v. de operaties cilindrische extensie, combinatie en projectie toe om willekeurige elastische restricties met elkaar te verenigen, en afleidingen te maken omtrent de min of meer mogelijke waarden van (een willekeurige deelverzameling van) de optredende veranderlijken. Een zeer algemene behandeling vindt men in [112].

3. *Projectie*: het resultaat van deze doorsnede wordt “geprojecteerd” op V , i.e. door het supremum over alle mogelijke waarden van u in U te nemen, bekomt men voor elke v in V de mogelijkheid dat Y de waarde v aanneemt, m.a.w. de gewenste elastische restrictie “ Y is B' ”.

In de volgende paragraaf breiden we dit mechanisme uit tot een meer algemeen *systeem van $n \geq 1$ vaagregels*.

Toepassing in Regelgebaseerde Systemen

De toepassing van de geschetste methode kwam op gang met een experiment van Mamdani en Assilian [97], die een *vaagregelaar* (fuzzy controller) opzetten om de goede werking van een stoommachine te regelen. Ze formuleerden daartoe een aantal regels van de vorm

- ALS de drukafwijking in de stoomketel *sterk negatief* (SN) is EN
de afgeleide van de drukafwijking is *NIET*(*sterk negatief* OF
gemiddeld negatief (GN))
DAN is de aangeraden wijziging van de temperatuur *sterk positief* (SP)

waarbij men een linguïstische term als “sterk negatief” definieert als een vaagverzameling SN in een geschikt universum (bv. $\mathbb{R}$ of één van haar deelverzamelingen), en men de connectieven “EN”, “OF” en “NIET” a.d.h.v. geschikte verzamelingtheoretische bewerkingen gestalte geeft². Zo kan bijvoorbeeld het antecedent worden omgevormd tot de generieke vorm “ X is A ”, waarbij X de samengestelde veranderlijke (drukafwijking, afgeleide(drukafwijking)) die waarden aanneemt in $U_1 \times U_2$, $U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, voorstelt en A gegeven wordt door, voor (u_1, u_2) in $U_1 \times U_2$,

$$A(u_1, u_2) = \min(SN(u_1), 1 - \max(SN(u_2), GN(u_2)))$$

Merk op dat het op die manier relatief eenvoudig is om complexe regels met meerdere veranderlijken in het antecedent te vormen. Conceptueel kunnen we dus vooropstellen dat de regelverzameling een aantal ($n \geq 1$) vaagregels van de vorm

$$\text{ALS } X \text{ is } A_1 \text{ DAN } Y \text{ is } B_1 \quad (1)$$

$$\text{ALS } X \text{ is } A_2 \text{ DAN } Y \text{ is } B_2 \quad (2)$$

...

$$\text{ALS } X \text{ is } A_n \text{ DAN } Y \text{ is } B_n \quad (n)$$

bevat. Wanneer nu in het bijzonder de waarnemingen m.b.t. de invoerveranderlijken scherpe getallen zijn (wat doorgaans het geval is in controletoeepassingen), en men bij het opstellen van de vaagrelatie R_i voor regel (i) gebruik maakt van het minimum zoals in formule (5.2) merkten Mamdani en Assilian op dat

²In het algemeen kan men gebruik maken van vrij te kiezen t-normen, t-conormen en negatoren, respectievelijk. In [97] werd een beroep gedaan op het de Morgan triplet ($\min$, $\max$, N_s).

toepassing van de CRI volgens formule (5.3) met deze regel zich herleidt tot, gegeven $A' = \{u^*\}$ met u^* in U , voor v in V ,

$$\begin{aligned} B'_i(v) &= \sup_{u \in U} \min(\{u^*\}(u), \min(A_i(u), B_i(v))) \\ &= \min(A_i(u^*), B_i(v)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

en het resultaat dus ontstaat door het consequent B_i op hoogte $A_i(u^*)$ af te knotten. Het globale inferentieresultaat B' berekenen ze door disjunctieve combinatie van de individuele outputs, i.e.

$$B'(v) = \bigcup_{i=1}^n B'_i(v) \quad (5.6)$$

waarbij rekening gehouden wordt met het feit dat indien een regel niet van toepassing is ($A_i(u^*) = 0$), diens bijdrage B'_i aan het eindresultaat a.h.w. wordt geannuleerd. Wanneer men het inferentieresultaat wil gebruiken voor de aansturing van een machine (zoals ook het geval was in [97]), moet het tot slot worden omgezet tot een scherpe waarde (een getal). Dergelijke transformatie wordt gerealiseerd door een zogenaamde *defuzzificatiemethode*. Mamdani en Assilian bijvoorbeeld pakten dit aan door eerst de verzameling $\Omega = \{v^* \mid v^* \in V \text{ en } (\forall v \in V)(B'(v^*) \geq B'(v))\}$ te bepalen, en daarna de defuzzificatiewaarde te berekenen als

$$\frac{\inf \Omega + \sup \Omega}{2} \quad (5.7)$$

in de veronderstelling dat Ω begrensd is. Voor deze rudimentaire methode werden later tal van alternatieven ontwikkeld; een uitgebreid overzicht vindt men o.m. in [129].

De aanpak van Mamdani en Assilian bleek een ware succesformule, wier design nadien ontelbare malen is gekopieerd, zowel op kleine (bv. intelligente programmabepaling bij wasmachines, automatische scherpstelling van de lens in fototoestellen) als op grote schaal (bv. controle van het vloeistofniveau in een reactor, het aanpassen van de navigatie van een vliegtuig aan veranderingen in windrichting en -snelheid).

Toch rijzen bij dit hele gebeuren een aantal bedenkingen. Het succes van vaaginferentie blijft immers beperkt tot in wezen eenvoudige controletoeepassingen, waarbij de “fuzzy logic” technologie in de eerste plaats garant lijkt te staan voor de toelevering van een aantal goedkope en flexibele softwarecomponenten. Onderzoek (zie o.m. [90]) heeft later ook uitgewezen dat de werking van een vaagregelaar zoals die van Mamdani en Assilian in feite kan worden gezien als een manier om een (slechts bij benadering gekende) onderliggende functie te interpoleren, waarbij elk van de vaagregels staat voor een benaderende evaluatie van die functie, en dat er van enige formeel-logische deductie (zoals men uit het formaat van de regels zou vermoeden), überhaupt geen sprake is.

Het oorspronkelijke benaderend redeneren, d.w.z. met elastische restricties als in- en uitvoer, is in feite grotendeels naar het achterplan verwezen (wat niet wegneemt dat het het voorwerp van talloze wetenschappelijke studies uitmaakt). Deze miskenning spruit volgens ons o.m. voort uit

- onvoldoende inzicht in het wezen van inferentie en het type van de informatie die daarbij wordt verwerkt; het feit dat Zadeh één en hetzelfde verwerkingmechanisme voor de formules (5.1) en (5.2) gebruikte is hiervoor symptomatisch;
- de hoge complexiteit van de berekeningen; toepassing van de CRI vergt in het algemeen de evaluatie van een supremum over U voor elke waarde in V ;

en heeft o.m. voor gevolg dat meer geavanceerde toepassingen, bv. in de context van artificiële intelligentie, voorlopig te hoog gegrepen blijven.

In wat volgt trachten we beide tekortkomingen te remediëren. Via een omweg langs de possibiliteitsleer, waarbij we het onderscheid tussen positieve en negatieve informatie belichten, willen we in Secties 5.1.3 en 5.1.4 een gegrond kader opbouwen waarin zowel het implicatiegebaseerd als het conjunctiegebaseerd model van vaaginferentie tot hun recht komen. Anderzijds wordt in Sectie 5.2 gezocht naar manieren om het één en het ander binnen het inferentiegebeuren efficiënter te laten verlopen zonder aan de essentiële semantiek van de afleidingen te raken.

5.1.2 Positieve en Negatieve Informatie in de Possibiliteitsleer

In Sectie 2.2.4 hebben we reeds gezien hoe Zadeh elastische restricties in een formeel jasje stopte a.d.h.v. possibiliteitsdistributies³. Ter herinnering: voor u in U geeft de waarde $\pi_X(u)$ de mogelijkheid weer dat de veranderlijke X , die waarden aanneemt in U , gelijk is aan u . Verkeert men volledig in het ongewisse omtrent de waarde van X , dan stelt men $\pi_X(u) = 1$ voor elke u in U , terwijl anderzijds $\pi_X(u) = 0$ voor zekere u betekent dat u een onmogelijke waarde is voor X (of ook, gelet op $\nu_X(u) = 1 - \pi_X(u)$, dat u zeker niet de waarde van X is). Het is belangrijk op te merken dat een hoge waarde voor $\pi_X(u)$ geen aanwijzing geeft dat u de waarde van X zou zijn, maar enkel dat u als mogelijke waarde niet expliciet wordt uitgesloten. Een possibiliteitsdistributie levert m.a.w. *negatieve* informatie in de zin dat zij situaties die niet in overeenstemming met de beschikbare kennis zijn in min of meerdere mate uitsluit.

Een possibiliteitsdistributie reflecteert de informatie die op een bepaald moment beschikbaar is omtrent X , en is als dusdanig vatbaar voor verfijning. Om dit extra in de verf te zetten, vermeldt men soms expliciet [18, 118] dat een

³Het eerder door hem uiteengezette verband met vaagverzamelingen kwam hierdoor volgens Zadeh niet in de verdrukking; integendeel, “*the mathematical apparatus of the theory of fuzzy sets provides a natural basis for the theory of possibility, playing a role which is similar to that of measure theory in relation to the theory of probability. Viewed in this perspective, a fuzzy restriction may be interpreted as a possibility distribution, and a fuzzy variable is associated with a possibility distribution in much the same manner as a random variable is associated with a probability distribution*” [145]

elastische restrictie zoals “ X is A ”, met A in $\mathcal{F}(U)$, een *bovengrens*⁴ oplegt aan de possibiliteitsdistributie van X , hetzij, voor u in U , $\pi_X(u) \leq A(u)$. Voor de eenvoud korten we dit soms af tot

$$\pi_X \leq A \quad (5.8)$$

Wanneer nieuwe kennis zich aandient, of wanneer meerdere bronnen terzelfder tijd een elastische restrictie op X formuleren, wordt in overeenstemming met formule (5.8) het *Principe van Minimale Specificiteit* (PMS) toegepast: gegeven n ongelijkheden van de vorm $\pi_X \leq A_i$, A_i in $\mathcal{F}(U)$ ($i = 1, \dots, n$) wordt de possibiliteitsdistributie van X beperkt door

$$\pi_X \leq \bigcap_{i=1}^n A_i \quad (5.9)$$

Men kiest m.a.w. voor de minst specifieke, of minst beperkingen opleggende distributie die in overeenstemming is met elk van de verschillende bronnen.

5.2 Opmerking. Het is duidelijk dat in formule (5.9) de “doorsnede” wordt genomen van de n bijdragende possibiliteitsdistributies. In een orthodoxe interpretatie van de spelregels kan men echter niet ongestraft het minimum door een willekeurige t -norm T vervangen, daar op die manier beperkingen zouden worden geïntroduceerd die sterker zijn dan elk van de individuele constituenten oplegt.

Zo kan men nagaan dat de inferentiemethode volgens Zadehs CRI besloten in formule (5.3) in overeenstemming is met het Principe van Minimale Specificiteit, in de zin dat, gelet op het gebruik van min en sup, de bekomen B' de minst specifieke restrictie aan Y oplegt die in overeenstemming is met de opgelegde beperkingen “ X is A' ” en “ (X, Y) is R ”, terwijl dit voor formule (5.4), waarin min vervangen wordt door T , niet langer het geval is. Gelet op het sowieso al subjectieve karakter van de possibiliteits- en lidmaatschapsgraden, en op het nut (zie verderop) van het gebruik van andere t -normen in inferentieprocessen, lijkt (5.9) een in bepaalde omstandigheden te strenge beperking; waar zinvol zullen we er dan ook van afstappen.

In de praktijk is het flexibel uitsluiten van mogelijke waarden, zoals veroorzaakt door een elastische restrictie, niet de enige manier waarop we informatie over een veranderlijke X kunnen bekomen. Vergelijk bv. de uitspraken “Dege-lijke huizen in Gent zijn niet goedkoop” en “Ik vond een mooie stek in Gent voor ongeveer 100.000 EUR”; terwijl het eerste gegeven de goedkopere prijsklassen als min of meer uitgesloten bestempelt, geeft de tweede uitspraak een expliciete *garantie* (door observatie) dat huizen in een bepaalde prijsklasse wel degelijk bestaan. Hoewel informatie van dit tweede type relevant is en frequent voorkomt, werd zij in de literatuur lange tijd stiefmoederlijk behandeld en verdoezeld achter de façade van elastische restricties en het succes van vaagregelaars, en is

⁴Om in de praktijk te kunnen “rekenen” met possibiliteitsdistributies, kan men de ongelijkheid tijdelijk door een gelijkheid vervangen, zolang men er zich maar van bewust is dat men werkt met een bovengrens.

slechts in de recentste jaren mondjesmaat aandacht beginnen krijgen. In [18] stellen de auteurs voor om zulke uitspraken te modelleren door het opleggen van een *ondergrens* $\pi_X \geq A$, waarbij het duale *positieve* karakter van dergelijke informatie t.o.v. van formule (5.8) duidelijk naar voor komt. Later (zie o.m. [63, 61]) werd deze ongelijkheid omgevormd tot

$$\delta_X \geq A \quad (5.10)$$

waarbij het verschijnen van de zogenaamde *gegarandeerde possibiliteitsdistributie*⁵ δ_X het onafhankelijk karakter t.o.v. π_X (die enkel door ongelijkheden van het type (5.8) wordt geregeerd) moet benadrukken.

Merk op dat $\delta_X(u) = 0$ betekent dat de waarde u niet expliciet is geobserveerd, en dus evenmin in een bepaalde mate kan worden gegarandeerd, als mogelijke waarde van X . Met X associeert men ook een zogenaamde *potentiële necessiteitsdistributie* ω_X , bepaald door $\omega_X(u) = 1 - \delta_X(u)$, die de maximale zekerheid, op grond van de observaties, dat X verschilt van u weergeeft. Zo betekent $\omega_X(u) = 0$ dat er geen enkele grond is om aan te nemen dat $X \neq u$.

Het *Principe van Maximale Specificiteit* [18], ook *Gesloten-Wereld Aanname* (closed-world assumption, GWA) genoemd [63], dicteert, duaal aan het PMS voor negatieve informatie, het samensmelten van n ongelijkheden van de vorm $\delta_X \geq A_i$, A_i in $\mathcal{F}(U)$ ($i = 1, \dots, n$), tot

$$\delta_X \geq \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (5.11)$$

waarbij een waarde gegarandeerd is in de mate dat ze door minstens één van de bronnen werd geobserveerd.

Men kan in het licht van positieve informatie ook twee nieuwe maten invoeren naar analogie met Definitie 2.56.

5.3 Definitie (Gegarandeerde mogelijkheid, Potentiële necessiteit). [18] Zij A een vaagverzameling in U en δ_X de gegarandeerde possibiliteitsdistributie van een veranderlijke X die waarden aanneemt in U . De gegarandeerde mogelijkheid en potentiële necessiteit van A worden gedefinieerd als:

$$\begin{aligned} \Delta_X(A) &= \inf_{u \in U} \mathcal{I}_{T_M}(A(u), \delta_X(u)) \\ \nabla_X(A) &= \sup_{u \in U} 1 - \mathcal{I}_{T_M}(1 - A(u), \delta_X(u)) \end{aligned}$$

5.4 Opmerking. De motivatie voor de keuze van Gödel implicator I_{T_M} wordt o.m. ingegeven door het feit dat I_{T_M} de kleinste (en dus minst garanties verstrekkende) R -implicator is; een verklaring waarom $\Delta_X(A)$ best vorm gegeven kan worden aan de hand van een R -implicator vindt men anderzijds terug in [18]. In

⁵Weisbrod [132] geeft aan dezelfde notie de naam “supportdistributie” mee (de informatie “ondersteunt” het optreden van bepaalde waarden voor X).

	mogelijkheid($X = u$)	zekerheid ($X \neq u$)
bovengrens	$\pi_X(u)$	$\omega_X(u)$
ondergrens	$\delta_X(u)$	$\nu_X(u)$

Tabel 5.1: Voorstelling van positieve en negatieve informatie.

een ruimere interpretatie kan men uiteraard ook opteren voor een willekeurige implicator I ; merk ook op dat wanneer A scherp is de definities zich herleiden tot

$$\begin{aligned}\Delta_X(A) &= \inf_{u \in A} \delta_X(u) \\ \nabla_X(A) &= \sup_{u \notin A} 1 - \delta_X(u)\end{aligned}$$

$\Delta_X(A)$ meet dus de mate waarin alle elementen in A gegarandeerd zijn, terwijl $\nabla_X(A)$ het bestaan nagaat van een niet–gegarandeerd element buiten A . Men gaat na dat Δ_X en ∇_X net als Π_X en N_X duale maten vormen, aangezien voor A in $\mathcal{F}(U)$ geldt:

$$\Delta_X(A) = 1 - \nabla_X(coA) \quad (5.12)$$

Tabel 5.1 recapituleert de betekenis van de diverse distributies die optreden bij de karakterisatie van een veranderlijke X in het licht van negatieve en positieve informatie. Merk in dit verband op dat “de” mogelijkheid dat X gelijk is aan u ook opgevat kan worden als een onvolledig gekende grootte die gelegen is in het interval $[\delta_X(u), \pi_X(u)]$; dit spoor, dat we ook zullen volgen in Sectie 5.1.4, verraaft een verband met intervalwaardige vaagverzamelingen. Een analoge redenering kan worden gemaakt voor het interval $[\nu_X(u), \omega_X(u)]$ m.b.t. de zekerheid dat X verschilt van u .

5.1.3 Anatomie van een Vaagregel

Tot dusver zijn we vrij losjes omgesprongen met het begrip “(vaag)regel”; zo gaven we in formules (5.1) en (5.2) twee heel uiteenlopende interpretaties van dezelfde uitspraak “ALS X is A DAN Y is B ”. Intuïtief kunnen we aanvoelen dat een regel een bepaalde wetmatigheid vastlegt die zich manifesteert in de werkelijkheid, nl. een oorzakelijk verband tussen de waarden van X en Y . Regels komen dan ook niet zomaar uit de lucht gevallen. Zo wint een uitspraak als “kinderen van laaggeschoolde ouders schoppen het minder ver in het onderwijs” aan kracht wanneer de regel in veel concrete situaties wordt *bevestigd* en hij slechts in een minderheid van de gevallen wordt *ontkracht*, of ook: wanneer voor de uitspraak veel voorbeelden en weinig tegenvoorbeelden aangehaald kunnen worden. In het volgende hoofdstuk bestuderen we methodes die m.b.t. dit tweevoudig kwaliteitscriterium zinvolle vaagregels uit datatabellen trachten te synthetiseren.

Voor de doeleinden van dit hoofdstuk kunnen we dit gedachtengoed als volgt formaliseren, waarbij we voor een goed begrip eerst scherp te werk gaan. Gegeven A in $\mathcal{P}(U)$, B in $\mathcal{P}(V)$, noemen we het koppel (u, v) in $U \times V$ m.b.t. de scherpe regel “ALS X is A DAN Y is B ”

- een *positief voorbeeld* indien $u \in A$ en $v \in B$
- een *negatief voorbeeld* indien $u \in A$ en $v \notin B$

Het is duidelijk dat alle positieve voorbeelden van de regel gegeven worden door $A \times B$ en alle negatieve door $A \times coB$. Merk ook op dat de koppels (u, v) in $coA \times V$ noch positief, noch negatief kunnen genoemd worden; in [55, 63] spreekt men over *irrelevante voorbeelden*.

Om de regel voor te stellen als een scherpe relatie R tussen U en V kan men twee richtingen uit:

- *Negatieve benadering*. Concreet stelt men hierbij $R = co(A \times coB)$, wat we voor de eenvoud afkorten tot $R = A \rightarrow B$. In termen van de lidmaatschapsfunctie van R kunnen we schrijven:

$$R(u, v) = A(u) \rightarrow B(v) = \begin{cases} 0 & \text{als } u \in A \text{ en } v \notin B \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Dit betekent dat negatieve voorbeelden expliciet worden uitgesloten, terwijl alle andere koppels in $U \times V$ bij verstek als mogelijk voor X en Y beschouwd worden, wat neerkomt op: “Als X een waarde aanneemt in A , dan ligt de waarde van Y met zekerheid in B (en kan onmogelijk in $co(B)$ liggen)”. Merk op dat deze benadering de regel dus beschouwt als een stukje negatieve informatie in het kader van de possibiliteitsleer, of m.a.w. als een elastische restrictie op de samengestelde veranderlijke (X, Y) . We noemen de regel daarom ook *negatief*.

- *Positieve benadering*. Hierbij geldt $R = A \times B$, m.a.w. de voorstelling van de regel valt samen met diens verzameling van positieve voorbeelden, zo dat

$$R(u, v) = A(u) \wedge B(v) = \begin{cases} 1 & \text{als } u \in A \text{ en } v \in B \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Positieve voorbeelden worden ondersteund door deze interpretatie, terwijl voor alle andere koppels in $U \times V$ bij gebrek aan bewijs $R(u, v) = 0$ wordt gesteld. Met andere woorden: “Als X in A ligt, dan is het perfect mogelijk (maar niet noodzakelijk) dat Y in B ligt”. In tegenstelling tot het voorgaande concordeert deze benadering met de uiteenzetting omtrent positieve informatie in de possibiliteitsleer; R kan derhalve niet als een elastische restrictie op (X, Y) worden opgevat, aangezien dit o.m. zou betekenen dat X geen waarden buiten A kan aannemen, wat überhaupt niet strookt met de betekenis van de regel (daar op die manier niet alleen negatieve maar ook irrelevante voorbeelden zouden worden geweerd). We hebben het dan over een *positieve* regel.

ALS	X is A_1	DAN	Y is B_1	(X, Y) is R_1
ALS	X is A_2	DAN	Y is B_2	(X, Y) is R_2
...				...
ALS	X is A_n	DAN	Y is B_n	(X, Y) is R_n
	X is A'			X is A'
			Y is B'	Y is B'

Tabel 5.2: Inferentie in een regelgebaseerd systeem gemodelleerd door vaagrelaties.

Het bovenstaande kan op voor de hand liggende wijze worden veralgemeend tot vaagverzamelingen, wat leidt tot de volgende algemene formules voor de voorstelling van een vaagregel in het implicatie- en het conjunctiegebaseerd model van vaaginferentie aan de hand van een vaagrelatie R tussen U en V ; voor I een implicator en T een t-norm op $[0,1]$, (u, v) in $U \times V$, onderscheiden we de alternatieven

$$R(u, v) = I(A(u), B(v)) \quad (5.13)$$

$$R(u, v) = T(A(u), B(v)) \quad (5.14)$$

die we afkorten door $R = I(A, B)$ en $R = T(A, B)$ respectievelijk. Uit deze ontleding komt duidelijk naar voor dat het gebruik van de (positieve) conjunctiegebaseerde formule (5.14) in de CRI, een procedure die uitdrukkelijk ontworpen is voor het redeneren met negatieve informatie, a.h.w. een contradictio in terminis oplevert. In de volgende paragraaf gaan we dieper in op de moeilijkheden die hieruit voortspruiten.

5.5 Opmerking. In wat volgt zullen we, tenzij waar anders aangegeven, steeds onderstellen dat A en B in formule (5.13), net als A in formule (5.14), elastische restricties voorstellen en er dus minstens één u in U (v in V) bestaat waarvoor $A(u) = 1$ ($B(v) = 1$). Voor B in (5.14) is dit gelet op bovenstaande uiteenzetting niet vereist.

5.1.4 Vaaginferentie

In deze paragraaf willen we de bevindingen uit de voorgaande secties synthetiseren om te komen tot een overkoepelend model van vaaginferentie met imprecieze informatie gezien vanuit het oogpunt van de possibiliteitsleer.

Tabel 5.2 beeldt de gegevens af waarmee we doorheen deze sectie werken: gegeven een systeem van n vaagregels, elk gemodelleerd door een vaagrelatie R_i tussen U en V , en een genormaliseerde waarneming A' in $\mathcal{F}(U)$ voor X , is het doel telkens het bepalen van de vorm van de conclusie B' in $\mathcal{F}(V)$ voor Y .

Implicatiegebaseerd Model

Indien elk van de vaagregels R_i , $i = 1, \dots, n$, van de vorm $R_i = I(A_i, B_i)$ is met I een implicator op $[0,1]$, dan gedraagt dus elk van deze regels zich als een

elastische restrictie op het koppel (X, Y) . Het principe van minimale specificiteit gebiedt dan deze individuele informatiebronnen te combineren tot

$$R = \bigcap_{i=1}^n R_i \quad (5.15)$$

waarbij de vaagrelatie R dus een “superregel” vertolkt die de beperkingen opgelegd door de verschillende regels in zich verenigt. Het inferentieresultaat B' volgt dan uit een toepassing van de CRI, hetzij, voor v in V ,

$$\begin{aligned} B'(v) &= R \uparrow_T A'(v) \\ &= \sup_{u \in U} T(A'(u), R(u, v)) \\ &= \sup_{u \in U} T\left(A'(u), \min_{i=1}^n R_i(u, v)\right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Het voorgestelde procédé is een instantie van wat men in de literatuur ook wel de FATI-aanpak (*First Aggregate Then Infer*) noemt: eerst worden de individuele regels samengenomen (geaggregeerd), daarna volgt de eigenlijke inferentiestap. In de duale FITA-methode (*First Infer Then Aggregate*) berekent men eerst voor de individuele vaagregels evenveel consequenten, nl. voor v in V , $i = 1, \dots, n$,

$$B'_i(v) = \sup_{u \in U} T(A'(u), R_i(u, v))$$

waarna het eindresultaat volgt uit conjunctieve combinatie van de B'_i 's, i.e. voor v in V ,

$$B'(v) = \bigcap_{i=1}^n B'_i(v) = \min_{i=1}^n \sup_{u \in U} T(A'(u), R_i(u, v)) \quad (5.18)$$

Men leidt eenvoudig af dat het resultaat bekomen met FITA nooit specifieker is dan formule (5.16) bekomen met FATI, hetzij

$$\min_{i=1}^n \sup_{u \in U} T(A'(u), R_i(u, v)) \geq \sup_{u \in U} T\left(A'(u), \min_{i=1}^n R_i(u, v)\right)$$

Gelet op de semantiek van een elastische restrictie leidt formule (5.18) daarom weliswaar niet tot een “verkeerd” resultaat (want door een bovengrens van het FATI-resultaat af te leiden worden geen strictere eisen opgelegd aan Y dan toegelaten), maar niet altijd tot de meest informatieve conclusie die we kunnen afleiden.

5.6 Voorbeeld. Het voorspellen van het weer is een ingewikkelde onderneming die wordt gecompliceerd door tal van factoren die de toestand van de atmosfeer beïnvloeden. Het is dan ook een geknipte kandidaat voor de toepassing van benaderend redeneren, waarbij beperkte middelen optimaal worden benut voor het genereren van aanvaardbare oplossingen.

Zo kan uit schommelingen in de luchtdruk, afgelezen op een barometer, vaak al een aardig (hoewel niet sluitend) beeld van de verhoudingen tussen

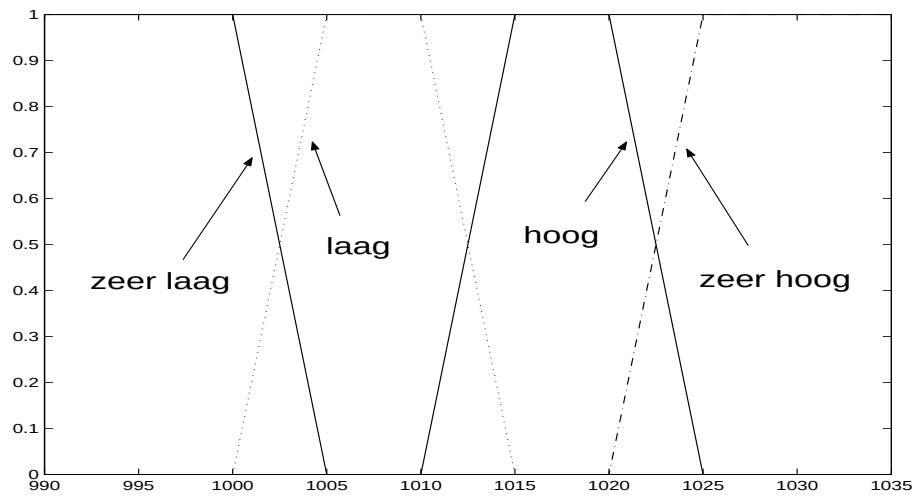
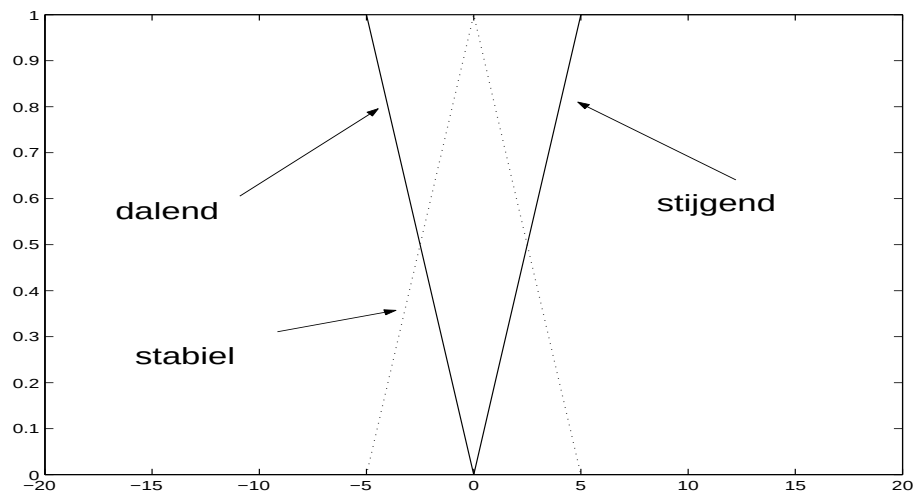
Hoge luchtdruk (boven 1013 hPa) : geringe neerslagkans	
stijgend = kans op zon	Hoe steiler de lijn, des te groter is de kans op zonnig weer. Stijgend boven 1023 hPa geeft grote kans op mooi weer.
dalend = bewolkt of toenemende bewolking	Hoe steiler de lijn en lager de druk, des te groter is de kans op bewolking. Dalend onder 1023 hPa geeft grote kans op bewolking en soms ook neerslag bij veelal een zuidwestenwind.
vlak = rustig weer	Hoe hoger de druk, des te meer kans op zon. Boven 1023 hPa geeft grote kans op zon.
Lage luchtdruk (onder 1013 hPa) : aanzienlijke bewolkings- en neerslagkans	
stijgend = opklarend	Hoe steiler de lijn, en hoger de druk, des te groter is de kans op opklaringen. Stijgend boven 1003 hPa geeft grote kans op opklaringen.
dalend = kans op neerslag	Hoe steiler de lijn en lager de druk, des te groter is de kans op neerslag en wind.
vlak = bewolkt weer	Hoe lager de druk, des te meer kans op neerslag. Onder 1003 hPa geeft grote kans op bewolking met neerslag.

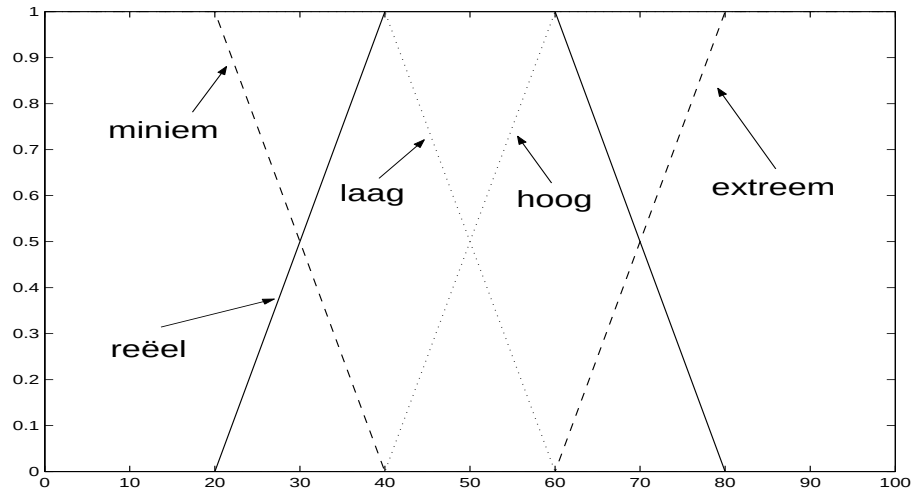
Tabel 5.3: Expertkennis omtrent het verband tussen luchtdruk en weersverwachting.

de weergoden worden afgeleid. Een aantal vuistregels, geplukt van de website http://home.hccnet.nl/v.d.horn/verwachting_luchtdruk/, worden weergegeven in Tabel 5.3.

Gebruikmakend van dergelijke elementaire kennis kunnen we reeds een rudimentair regelgebaseerd systeem opstellen, met als invoerveranderlijken de gemeten luchtdruk (in hPa) en de schommeling (over een bepaalde tijdseenheid) in de luchtdruk, en als uitvoerveranderlijke de procentuele kans op neerslag. Met elke veranderlijke laten we een aantal linguïstische veranderlijken overeenstemmen, waarvan de corresponderende lidmaatschapsfuncties afgebeeld zijn in de Figuren 5.1, 5.2 en 5.3; voor de eenvoud, en gelet op het ruwe granuleringsniveau van de voorgestelde oplossing, kiezen we voor stuksgewijs lineaire functies (i.h.b. triangulaire en trapezoïdale lidmaatschapsfuncties).

Tabel 5.4 bevat een twaalfstal ALS-DAN regels die ontstaan door met elke combinatie van invoertermen de gepaste uitvoer te laten overeenstemmen, en die we als implicatiegebaseerde vaagregels modelleren. Om de gedachten te vestigen, spitsen we ons in eerste instantie toe op de afleiding van informatie op grond van een enkele regel (“ALS de luchtdruk laag is en de schommeling stabiel DAN is de kans op neerslag reëel”) die we uit de regelverzameling pikken en die we laten inwerken op een aantal scherpe invoerwaarden voor het koppel veranderlijken (*luchtdruk*, *luchtdrukschommeling*); zoals we hebben gezien moet bij de implementatie van het regelgebaseerd systeem een impicator I (voor de

Figuur 5.1: Lidmaatschapsfuncties voor de veranderlijke *luchtdruk*.Figuur 5.2: Lidmaatschapsfuncties voor de veranderlijke *luchtdrukschommeling*.



Figuur 5.3: Lidmaatschapsfuncties voor de veranderlijke *neerslagkans*.

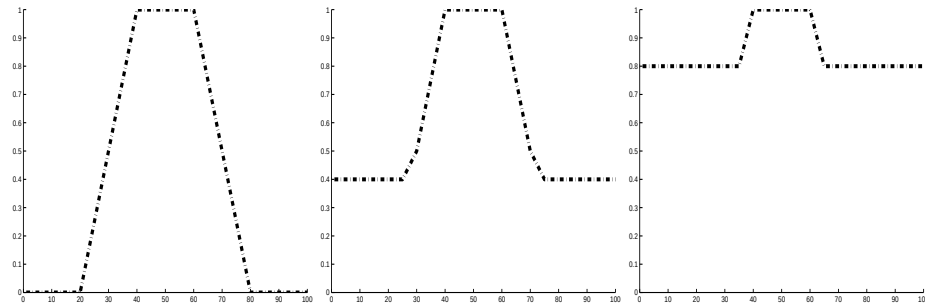
	zeer laag	laag	hoog	zeer hoog
stijgend	reëel	laag	laag	miniem
stabiel	hoog	reëel	laag	miniem
dalend	zeer hoog	hoog	reëel	laag

Tabel 5.4: Specificatie van een regelgebaseerd systeem voor de neerslagkans op grond van de luchtdrukmeting (horizontaal) en de schommeling in de luchtdruk (verticaal).

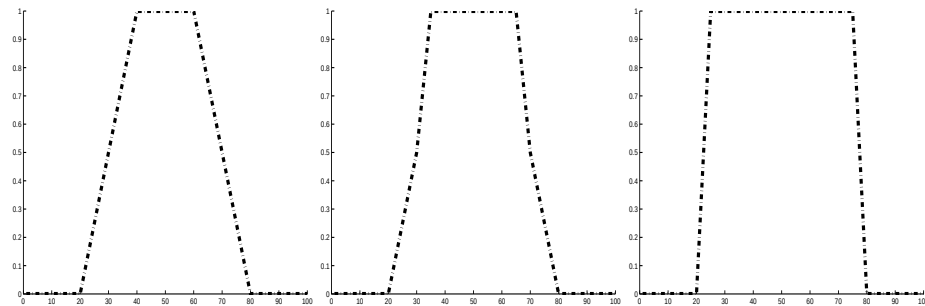
opbouw van de vaagregel) en een t-norm T (voor het toepassen van de CRI) gekozen worden. Zo geeft Figuur 5.4 het inferentieresultaat voor de waarnemingen $(1005, 0)$, $(1003, 0)$ en $(1001, 0)$, waarbij $I = I_{S_M}$, terwijl we in Figuur 5.5 de afleiding met $I = I_{T_M}$ voor dezelfde invoer kunnen aflezen. Merk op dat de keuze van de t-norm T in dit bijzondere geval geen rol speelt.

Uit deze resultaten valt meteen de verschillende manier op waarop voor de twee implicatoren de uitvoer uit het consequent van de vaagregel $R = I(A, B)$ wordt verkregen; in het geval van de Kleene–Dienes implicator wordt, naarmate de scherpe invoer u^* verder afwijkt van de kern van het antecedent van de vaagregel, het consequent “ondergedompeld in een bad van onzekerheid”, d.w.z. alle elementen van het universum behoren tot de conclusie (“zijn mogelijk”) in een mate die minstens gelijk is aan $I_{S_M}(A(u^*), B(v)) = \max(1 - A(u^*), B(v))$. Wanneer $A(u^*) = 0$ is het inferentieresultaat derhalve gelijk aan V : geen enkele waarde kan op basis van deze waarneming en deze regel worden uitgesloten.

Het gebruik van de Gödel implicator leidt dan weer tot een graduele ver-



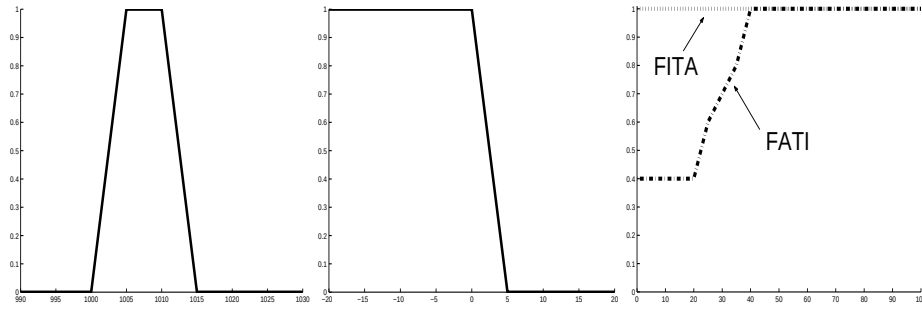
Figuur 5.4: Inferentieresultaat voor scherpe invoer met Kleene–Dienes implicator I_{S_M} . De luchtdrukschommeling is telkens 0. a) luchtdruk = 1005 b) luchtdruk = 1003 c) luchtdruk = 1001.



Figuur 5.5: Inferentieresultaat voor scherpe invoer met Gödel implicator I_{T_M} . De luchtdrukschommeling is telkens 0. a) luchtdruk = 1005 b) luchtdruk = 1003 c) luchtdruk = 1001.

ruiming van de kern van het consequent; hoe minder de gemeten luchtdruk u^* behoort tot *laag*, hoe meer waarden voor de neerslagkans perfect mogelijk worden, m.a.w. tot $\ker(B')$ gaan behoren.

Het blijkt dat dit gedrag samenhangt met het feit of I een S- dan wel een R-implicator is, en in grote lijnen behouden blijft wanneer men meer algemeen vaagverzamelingen als waarnemingen toelaat. In het eerste geval spreekt men soms over zekerheidsregels, terwijl men het in het tweede geval over graduele regels heeft. [59] Zoals men kan verwachten combineert de Lukasiewicz implicator $I_{S_W} = I_{T_W}$ beide effecten en is daarom in de praktijk een goede implicatorkeuze bij verstek⁶.

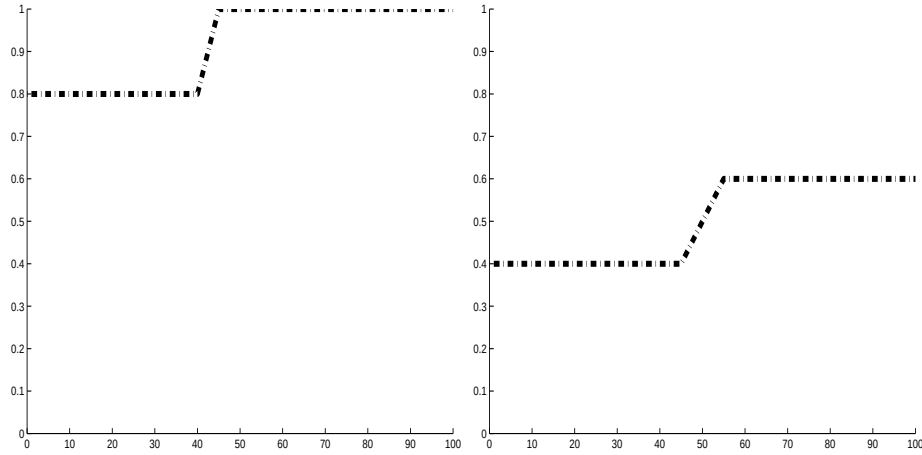


Figuur 5.6: b) Invoer *luchtdruk* b) Invoer *luchtdrukschommeling* c) Inferentieresultaat met FATI en FITA ($T = T_W$, $I = I_{T_W}$).

Om inferentie uit de volledige regelverzameling te realiseren is zoals gezegd een aggregatiemechanisme nodig. Figuur 5.6 toont voor een opgegeven combinatie van (vage) invoerwaarden voor de luchtdruk en de luchtdrukschommeling, het uitvoerresultaat met de alternatieven FATI en FITA, waarbij de individuele regels met de Lukasiewicz implicator worden gemodelleerd en $T = T_W$. Daar we de waarneming kunnen samenvatten als “de druk is laag en de schommeling is dalend of stabiel” lijkt gelet op Tabel 5.4 de juiste conclusie “de regenkans is reëel of hoog”. Het FATI-resultaat benadert deze oplossing duidelijk beter dan het geheel informatieloze antwoord verstrekt door FITA, wat voor deze specifieke invoer pleit in het voordeel van de eerste aanpak.

Een belangrijke karakteristiek van een implicatiegebaseerd systeem van vaagregels is *consistentie* (soms ook *coherentie* [62] genoemd). Consistentie heeft in

⁶In o.m. [59, 63] staan de auteurs een vrij scherpe opdeling voor van de situaties waarbij zekerheids- dan wel graduele regels nuttig zijn. Het lijkt ons echter dat in veel reële problemen beide aspecten nuttig én relevant zijn. Men moet er zich bovendien rekenschap van geven dat bepaalde implicatorkeuzes tot zeer specifieke gedragingen leiden; merk bv. op dat bij het gebruik van de Gödel implicator met scherpe invoer u^* , elementen die buiten de drager van het consequent B liggen in geen enkele mate tot de conclusie B' behoren zolang $A(u^*) > 0$, en er opeens perfect toe gaan behoren wanneer $A(u^*) = 0$.



Figuur 5.7: Inferentieresultaat voor scherpe invoer (1002, 2). a) $I = I_{T_W}, T = T_W$ b) $I = I_{S_M}, T = T_M$.

de eerste plaats te maken met de eis die we in Definitie 2.55 hebben opgelegd aan een possibiliteitsdistributie π_X , namelijk dat er minstens één waarde in het universum van X perfect mogelijk moet zijn. Inconsistentie, d.w.z. het optreden van een *subnormaal* inferentieresultaat (een niet-genormaliseerde vaagverzameling) kan worden gezien als een situatie waarin twee geheel of gedeeltelijk conflicterende bronnen (vaagregels) niet-compatibele waarden met de uitvoerveranderlijke associëren. [137] In het meest extreme geval geldt voor de uitvoer $B'(v) = 0$ voor elke v in V , een toestand van volledig conflict. Zoiets komt bijvoorbeeld voor indien we aan de regelverzameling uit Tabel 5.4 de regel “ALS de luchtdruk laag is en de schommeling dalend DAN is de neerslagkans laag” zouden toevoegen. Intuïtief voelt men aan dat conflict voortspuit uit een onbedachtzame specificatie van de regelverzameling, alhoewel gedeeltelijke subnormalisatie soms zeer moeilijk te vermijden is.

Algoritmes om de consistentie van een regelverzameling te verifiëren en (gedeeltelijk) te elimineren zijn gelukkig voorhanden (zie o.m. [62, 137]). In de veronderstelling dat de betrokken universa eindig zijn⁷ en dat de waarneming A' zelf genormaliseerd is, geldt formeel dat het inferentieresultaat bekomen op grond van de regelverzameling uit Tabel 5.2 genormaliseerd is indien

$$(\forall u \in U) \left(\sup_{v \in V} \min_{i=1}^n R_i(u, v) = 1 \right) \quad (5.19)$$

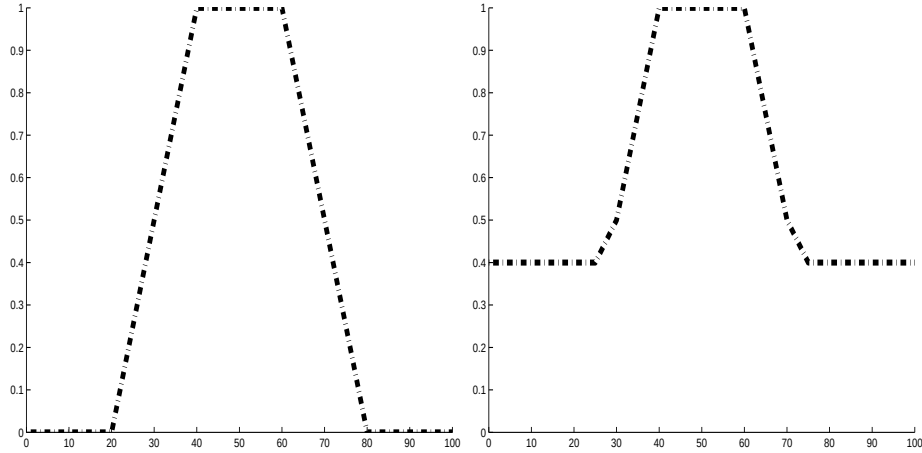
Inderdaad, deze voorwaarde garandeert dat voor u^* in $\ker(A')$ er een v in V

⁷Merk op dat dit in de praktijk meestal het geval is, omdat het bepalen van het supremum over alle elementen van U niet altijd analytisch kan gebeuren (zie ook Sectie 5.1.5)

bestaat zo dat

$$T\left(A(u^*), \min_{i=1}^n R_i(u, v)\right) = 1$$

en deze v derhalve met zekerheid tot de kern van de conclusie zal behoren. Op grond van deze exhaustieve evaluatietechniek komt o.m. aan het licht dat de regels uit Tabel 5.4 samen consistent zijn wanneer ze met de Lukasiewicz implicator worden gemodelleerd, maar met bv. de Kleene–Dienes implicator is het optreden van een subnormaal resultaat niet uitgesloten, wat wordt geïllustreerd in Figuur 5.7.



Figuur 5.8: Inferentieresultaat voor de waarneming *luchtdruk = laag* en *luchtdrukschommeling = stabiel*. a) Inferentieresultaat met Lukasiewicz implicator I_{T_W} b) Inferentieresultaat met Kleene–Dienes implicator I_{T_M} .

Een andere wenselijke eigenschap die men vaak oplegt aan een regelgebaseerd systeem (implicatie- dan wel conjunctiegebaseerd) houdt in dat wanneer de waarneming exact overeenstemt met het antecedent van één van de regels, de conclusie dan gelijk zou zijn aan het consequent van die bepaalde regel. Men heeft het dan over *behoud van de modus ponens* of soms ook over *inferentiële onafhankelijkheid*. Dat deze eigenschap niet steeds is voldaan wordt in Figuur 5.8b) geïllustreerd.

Behoud van de modus ponens hangt samen zowel met de keuze van T en I als met de specificatie van de antecedenten van de vaagregels. Volgende stelling formuleert een voldoende voorwaarde voor de vervulling van dit integriteitscriterium voor redeneren met negatieve informatie, zowel met FATI als met FITA.

5.7 Stelling. Zij T een links-continue t-norm. Als voor de regelverzameling uit Tabel 5.2 geldt

1. $(\forall i, j \in \{1, \dots, n\})(i \neq j \Rightarrow \text{supp}(A_i) \cap \text{ker}(A_j) = \emptyset)$
2. $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\forall (u, v) \in U \times V)(R_i(u, v) = I_T(A_i(u), B_i(v)))$

dan geldt, voor j in $\{1, \dots, n\}$ en v in V ,

$$\sup_{u \in U} T \left(A_j(u), \min_{i=1}^n R_i(u, v) \right) = B_j(v) \quad (5.20)$$

$$\min_{i=1}^n \sup_{u \in U} T(A_j(u), R_i(u, v)) = B_j(v) \quad (5.21)$$

Bewijs. We bewijzen bv. het resultaat (5.20) voor FATI. Zij daartoe v in V , en u^* in $\text{ker}(A_j)$; vermits A_j genormaliseerd is (cfr. Opmerking 5.5), kan men dergelijke u^* steeds vinden. Wegens onderstelling 1. geldt $A_i(u^*) = 0$ voor $i \neq j$, zo dat

$$\begin{aligned} \sup_{u \in U} T \left(A_j(u), \min_{i=1}^n R_i(u, v) \right) &\geq T \left(A_j(u^*), \min_{i=1}^n I_T(A_i(u^*), B_i(v)) \right) \\ &= \min_{i=1}^n I_T(A_i(u^*), B_i(v)) \\ &= I_T(A_j(u^*), B_j(v)) \\ &= B_j(v) \end{aligned} \quad (5.22)$$

waarbij ook gebruik werd gemaakt van het feit dat een R-implicator steeds voldoet aan het Smets–Magrez axioma (A.2). Anderzijds geldt, wegens de links–continuïteit van T en eigenschap 3 uit Stelling 2.29 dat, voor u in U ,

$$\begin{aligned} &T \left(A_j(u), \min_{i=1}^n I_T(A_i(u), B_i(v)) \right) \\ &\leq T(A_j(u), I_T(A_j(u), B_j(v))) \\ &\leq B_j(v) \end{aligned}$$

waaruit $\sup_{u \in U} T \left(A_j(u), \min_{i=1}^n R_i(u, v) \right) \leq B_j(v)$. Samen met (5.22) levert dit het gestelde. $\square$

Voor S-implicatoren geldt bovenstaand resultaat niet noodzakelijk, zelfs niet indien er slechts één vaagregel wordt gebruikt (zie bv. [91]). Gelet op het belang dat we hechten aan het behoud van de modus ponens, valt de vergelijking wat betreft de implicatorkeuze dus duidelijk in het voordeel van residuele implicatoren uit.

Conjunctiegebaseerd Model

Wanneer we de vaagrelaties in Tabel 5.2 a.d.h.v. een t-norm T vorm geven, d.w.z. $R_i = T(A_i, B_i)$, dan schrijft de “traditionele” aanpak (zie bv. [65]) voor om de volgende stappen te ondernemen (onderstel T links–continu):

1. Voor elke regel wordt het partiële inferentieresultaat B'_i ($i = 1, \dots, n$) bekomen door toepassing van de CRI m.b.v. T , i.e., voor v in V ,

$$\begin{aligned}
 B'_i(v) &= R_i \uparrow_T A'(v) \\
 &= \sup_{u \in U} T(A'(u), T(A_i(u), B_i(v))) \\
 &= \sup_{u \in U} T(T(A'(u), A_i(u)), B_i(v)) \\
 &= T\left(\sup_{u \in U} T(A'(u), A_i(u)), B_i(v)\right) \\
 &= T(OVL_T(A', A_i), B_i(v))
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

2. De individuele bijdragen worden geaggregeerd tot het eindresultaat, waaruit, voor v in V ,

$$B'(v) = \bigcup_{i=1}^n B'_i(v) = \max_{i=1}^n T\left(\sup_{u \in U} T(A'(u), A_i(u)), B_i(v)\right) \tag{5.24}$$

Met andere woorden, voor elke regel wordt de mate waarin de waarneming overeenstemt met het antecedent A_i van de regel bepaald en gebruikt om het consequent B_i te modifieren tot B'_i (bv. door afkapping indien $T = T_M$, of door een homothetie indien $T = T_P$); de disjunctieve aggregatie vloeit voort uit het feit dat een regel die niet van toepassing is (doordat $A' \cap_T A = \emptyset$) op die manier buiten spel wordt gezet. Het algoritme volgt blijkbaar de FITA-aanpak; merk evenwel op dat de FATI-variant zich herleidt tot hetzelfde eindresultaat, daar voor (u, v) in $U \times V$,

$$\begin{aligned}
 \sup_{u \in U} T\left(A'(u), \left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right)(u, v)\right) &= \sup_{u \in U} T\left(A'(u), \max_{i=1}^n T(A_i(u), B_i(v))\right) \\
 &= \max_{i=1}^n \sup_{u \in U} T(A'(u), T(A_i(u), B_i(v))) \\
 &= \max_{i=1}^n T\left(\sup_{u \in U} T(A'(u), A_i(u)), B_i(v)\right)
 \end{aligned}$$

Bovenstaande aanpak ligt duidelijk in het verlengde van Mamdani en Assilans prototype van een vaagregelaar; ofschoon de veralgemening van een scherpe invoer tot een vaagverzameling geen aanleiding geeft tot een buitensporige berekeningskost, maken diverse auteurs melding van ongewenste neveneffecten bij het gebruik ervan:

- Betreffende het behoud van de modus ponens. [54] Indien bv. $T = T_M$ in formule (5.24), dan is voor de waarneming $A' = A_i$ het inferentieresultaat slechts gegarandeerd gelijk aan B_i wanneer $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$, een al te strenge beperking.

- Betreffende het ketenen van conjunctiegebaseerde vaagregels. [133] Wanneer men de uitvoer van het ene regelgebaseerd systeem gebruikt als invoer voor het andere, merken Weisbrod en Spott op dat de opeenvolgende inferentieresultaten de neiging hebben zo “vaag” te worden (bv. elke v in V behoort in de mate 0.5 tot B') dat ze geen wezenlijke informatie meer bevatten, *zelfs al wordt als initiële invoer een scherpe waarde gekozen.*
- Betreffende de imprecisie van de conclusie. [63] Wanneer de waarneming zeer imprecies is (vele waarden zijn in een hoge mate mogelijk), zullen gelet op bovenstaand algoritme meer regels een bijdrage leveren aan het eindresultaat, met een zeer imprecieze conclusie tot gevolg. Hoewel het verleidelijk is om hieraan de interpretatie te hechten dat we eenvoudigweg de rekening betalen voor een te vage invoer, of om erop te vertrouwen dat een geschikte defuzzificatiemethode in de meeste gevallen de plooiën toch weer glad strijkt, moeten we ons de vraag stellen: *“Is het aannemelijk dat zoveel waarden in een wezenlijke mate gegarandeerd mogelijk zijn voor de uitvoerveranderlijke, terwijl we nagenoeg niets weten over de invoerveranderlijken?”*

Het blijkt dat de problemen zich situeren in het verwerken van de verschillende types informatie die bij het inferentieproces meespelen. De waarneming A' is enerzijds op te vatten als een elastische restrictie op X , terwijl anderzijds de conjunctiegebaseerde regels R_i positieve informatie, en dus welbepaalde garanties, voorstellen. De hamvraag is met andere woorden [63]: *“How to exploit a set of fuzzy cases, which for each input value describes the fuzzy set of guaranteed possible output values, on the basis of negative imprecise information on the input?”*

Om de zaken in het juiste perspectief te plaatsen, gaan we eerst uit van de veronderstelling dat alle A_i en B_i die in de regels voorkomen scherp zijn. Gebruik makende van de gesloten-wereld aanname aggregeren we de conjunctiegebaseerde regels tot de scherpe relatie R tussen U en V gegeven door

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

Indien $X = u$, dan is v in V een gegarandeerd mogelijke waarde voor Y indien $(u, v) \in R$. Indien echter slechts geweten is dat de waarde van X behoort tot A' in $\mathcal{P}(U)$, dan behoort v pas tot de ondersteunde waarden voor Y indien

$$(\forall u \in U)(u \in A' \Rightarrow (u, v) \in R)$$

wat neerkomt op: “Wat ook de waarde van u in A' is, het koppel (u, v) , en dus de waarde v , is steeds gegarandeerd mogelijk.” Hiermee rekening houdend bekomt men het inferentieresultaat als

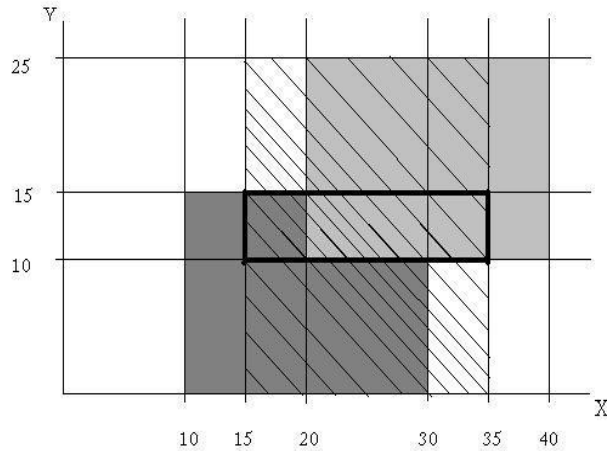
$$B' = \{v \mid v \in V \text{ en } (\forall u \in U)(u \in A' \Rightarrow (u, v) \in R)\} \quad (5.27)$$

Bovenstaande formule staat in de literatuur [87] ook bekend als het *subdirect beeld* $R \triangleleft A'$ van A' onder R . Het bevat de elementen van V waarmee alle elementen van A' in verband R staan.

5.8 Voorbeeld. Zij $U = V = \mathbb{R}$ en beschouw de regels

ALS X is een element van $[10, 30]$ DAN is Y een element van $[0, 15]$
 ALS X is een element van $[20, 40]$ DAN is Y een element van $[10, 25]$

Stel dat men weet dat de mogelijke waarden van X beperkt zijn tot het interval $[15, 35]$. De situatie is uitgebeeld in Figuur 5.9; het donkergrijs gebied $[10, 30] \times [0, 15]$ en het lichtgrijs gebied $[20, 40] \times [10, 25]$ bevatten de gegarandeerd mogelijke waarden voor het koppel (X, Y) volgens de eerste, resp. tweede regel. Noemen we $A_1 = [10, 30]$, $A_2 = [20, 40]$, $B_1 = [0, 15]$, $B_2 = [10, 25]$ en $A' = [15, 35]$, dan geldt, voor een willekeurige t -norm T , $OVLT(A', A_1) = OVLT(A', A_2) = 1$, zodat het inferentieresultaat op basis van formule (5.24) gelijk is aan $B' = B_1 \cup B_2 = [0, 25]$. Met andere woorden, in de optiek van de CRI komt het gebied van de gegarandeerde waarden voor het koppel (X, Y) overeen met de gearceerde rechthoek $[15, 35] \times [0, 25]$ uit Figuur 5.9. Dit gebied bevat echter punten (in de linkerboven- en rechteronderhoek van het gearceerde gebied, zoals het koppel $(15, 25)$) die door geen van de regels als mogelijke waarde voor (X, Y) worden gegarandeerd. Op grond van de gevoerde uiteenzetting bevat enkel de vet omrande rechthoek in de figuur de gegarandeerde koppels van waarden voor X en Y , zodat de correcte uitvoer m.b.v. formule (5.27) gelijk is aan $[10, 15]$.



Figuur 5.9: Grafische voorstelling van de situatie uit Voorbeeld 5.8.

Wanneer we de redenering doortrekken naar een vage input en regelverzameling, kunnen we formule (5.27) op de gekende wijze veralgemenen a.d.h.v. een

implicator⁸ I zo dat de conclusie B' bepaald wordt door, voor v in V ,

$$\begin{aligned} B'(v) &= R \triangleleft_I A'(v) \\ &= \inf_{u \in U} I(A'(u), R(u, v)) \\ &= \inf_{u \in U} I\left(A'(u), \max_{i=1}^n T(A_i(u), B_i(v))\right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.9 Opmerking. Indien de waarneming een scherpe waarde u^* is, herleiden zowel formule (5.24) als (5.28) zich tot de uitdrukking (5.6), het inferentieresultaat bij Mamdani en Assilans vaagregelaar. Dit verklaart meteen waarom de gestelde problemen met de op de CRI gestoelde methode zich op dat niveau niet manifesteren. Merk daarnaast ook op dat de FITA-variant van formule (5.28), gegeven door, voor v in V ,

$$B'(v) = \max_{i=1}^n \inf_{u \in U} I(A'(u), T(A_i(u), B_i(v))) \quad (5.29)$$

steeds een deelverzameling van het FATI-resultaat is, en dus voor bepaalde (imprecieze) invoerwaarden minder gulle garanties kan opleveren.

5.10 Voorbeeld. Voor de eenvoud van de uiteenzetting gaan we ervan uit dat dezelfde regels (i.h.b. met dezelfde lidmaatschapsfuncties voor hun respectieve antecedenten en consequenten) als in Voorbeeld 5.6 gebruikt worden, dit keer uiteraard gemodelleerd a.d.h.v. een t -norm T . Indien we het redeneeralgoritme vervat in formule (5.28) willen uitvoeren is bovendien een implicator I vereist.

Uit Figuur 5.10 blijkt dat het resultaat met de CRI voor de imprecieze waarneming uit Figuur 5.6 niet met de verwachtingen strookt, daar o.m. substantiële garanties worden verstrekt voor *zeer hoge* en *zeer lage* neerslagkans, terwijl de informatie bevat in de rechtse afbeelding zich wél tot een zinvolle interpretatie leent: nl., enkel voor deze waarden die zich situeren rond een neerslagkans van 60%, is er voor elke mogelijke waarde van de invoerveranderlijken een zekere mate van steun.

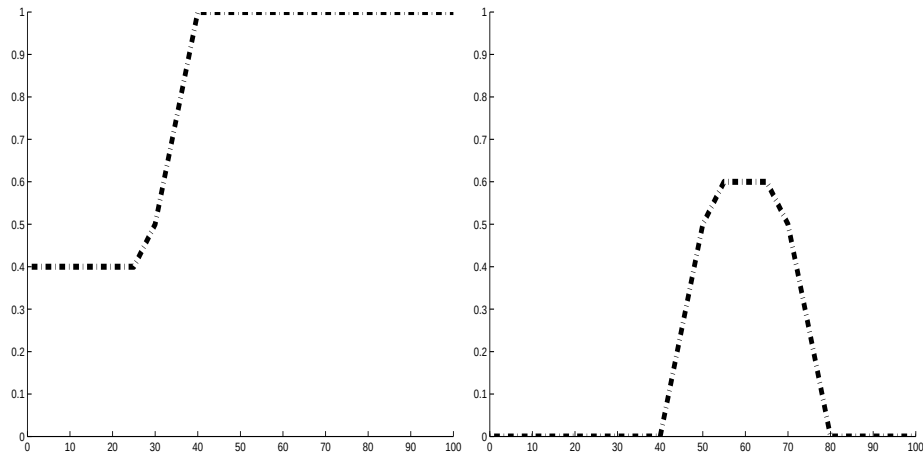
Anderzijds toont Figuur 5.11 het gedrag van de beide inferentiemethoden voor een invoer die samenvalt met het antecedent van één van de regels. Opnieuw blijkt dat de CRI tekortschiet doordat bepaalde waarden buiten de drager van het consequent *reëel* in een mate groter dan 0 gegarandeerd mogelijk geacht worden.

Omtrent het behoud van de modus ponens geldt het volgende analogon van Stelling 5.7.

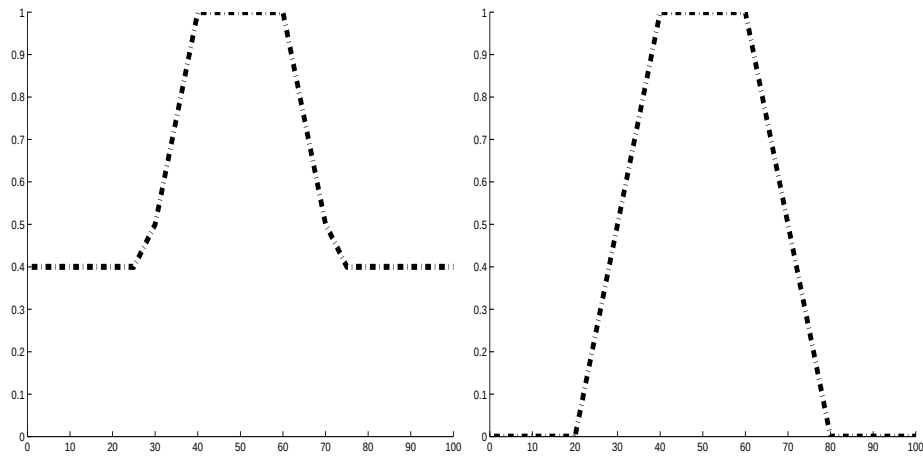
5.11 Stelling. Zij T een links-continue t -norm. Als voor de regelverzameling uit Tabel 5.2 geldt

1. $(\forall i, j \in \{1, \dots, n\})(i \neq j \Rightarrow \text{supp}(A_i) \cap \text{ker}(A_j) = \emptyset)$
2. $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\forall (u, v) \in U \times V)(R_i(u, v) = T(A_i(u), B_i(v)))$

⁸Dubois, Prade en Ughetto [63] doen meer concreet een beroep op de Gödel implicator.



Figuur 5.10: Inferentieresultaat voor de invoer uit Figuur 5.6. a) Gebruikmakend van de CRI met $T = T_M$ b) Gebruikmakend van formule (5.28) met $I = I_{S_M}, T = T_M$.



Figuur 5.11: Inferentieresultaat voor de invoer *luchtdruk* = *laag*, *luchtdrukschommeling* = *stabil*. a) Gebruikmakend van de CRI met $T = T_M$ b) Gebruikmakend van formule (5.28) met $I = I_{T_M}, T = T_M$.

dan geldt, voor j in $\{1, \dots, n\}$ en v in V ,

$$\inf_{u \in U} I_T \left(A_j(u), \max_{i=1}^n R_i(u, v) \right) = B_j(v) \quad (5.30)$$

$$\max_{i=1}^n \inf_{u \in U} I_T(A_j(u), R_i(u, v)) = B_j(v) \quad (5.31)$$

Bewijs. Het bewijs verloopt analoog aan dat van Stelling 5.7. □

Volgende stelling suggereert anderzijds dat voor S-implicatoren, en dus in het bijzonder voor I_{S_W} , een verband met de methode voor de verwerking van implicatiegebaseerde regels, en dus met het direct beeld, mogelijk is.

5.12 Stelling. Zij T een links-continue t-norm, N een involutieve negator en $I = I_{S,N}$, waarbij S de duale t-conorm van T t.o.v. N is. Zij voorts R een vaagrelatie tussen U en V . Dan geldt, voor elke A' in $\mathcal{F}(U)$ en v in V ,

$$R \triangleleft_I A'(v) = \inf_{u \in U} I(A'(u), R(u, v)) = N((co_N R) \uparrow_T A'(v)) \quad (5.32)$$

Bewijs. Zij A' in $\mathcal{F}(U)$. Voor v in V geldt

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} I(A'(u), R(u, v)) &= \inf_{u \in U} S(N(A'(u)), R(u, v)) \\ &= \inf_{u \in U} N(T(A'(u), N(R(u, v)))) \\ &= N\left(\sup_{u \in U} T(A'(u), N(R(u, v)))\right) \\ &= N((co_N R) \uparrow_T A'(v)) \end{aligned}$$

□

Bovenstaand resultaat, dat in het algemeen niet geldt wanneer men $I_{S,N}$ vervangt door I_T , is beter te begrijpen wanneer men bedenkt dat voor (A, B) in $\mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(V)$ geldt dat

$$\begin{aligned} B &= (A \rightarrow B) \uparrow A \\ B &= co(co(A \times B) \uparrow A) \end{aligned}$$

De eerste gelijkheid vertolkt rechtstreeks de negatieve benadering uit Sectie 5.1.3: negatieve voorbeelden worden uitgesloten, dus gegeven X in A komen enkel de waarden uit B in aanmerking voor Y . Anderzijds wordt in de tweede gelijkheid de positieve benadering (positieve voorbeelden worden bevestigd) eerst omgevormd tot een restrictie (positieve voorbeelden worden uitgesloten), zodat $X \in A$ aanleiding geeft tot $Y \notin B$. Door complementering van deze restrictie bekomt men uiteindelijk de gegarandeerd mogelijke waarden voor Y .

Algemeen Model

We hebben tot dusver stilzwijgend aangenomen dat een regelgebaseerd systeem ofwél met implicatiegebaseerde, ofwél met conjunctiegebaseerde vaagregels wordt opgebouwd, waarbij we ons niet hebben bekommerd omtrent de afwegingen die m.b.t. deze keuze gemaakt dienen te worden.

Strict pragmatisch gezien zijn implicatiegebaseerde regels aangewezen wanneer de uitvoer van het systeem moet dienen als waarneming voor een nieuwe inferentiestap, aangezien enkel zij elastische restricties produceren. Merk op dat dit ook verklaart waarom conjunctiegebaseerde regels problemen opleveren bij het ketenen. Anderzijds leent de uitvoer van vaaginferentie onder een stel conjunctiegebaseerde vaagregels zich meestal beter tot defuzzificatie, daar deze procedure zoekt naar de scherpe waarde voor Y die, in zekere zin, het meest ondersteund wordt door de waarneming over X en de regels.

Op een dieper niveau zijn er ook semantische maatstaven om de knoop wat betreft de regelkeuze door te hakken. Zo houdt Weisbrod [132] ons het beeld van de “betrouwbare” en de “communicatieve” expert voor ogen:

“The *reliable* expert is very cautious and tells us only things he is sure about. Additionally, he avoids to transmit contradictions. Whenever he detects an inconsistency within his knowledge, he keeps the corresponding information under his hat. [...] The second type of expert may be characterized as the *communicative* one. He tells us every accessible piece of his knowledge without caring about compatibility.”

Inderdaad moeten we ons in het implicatiegebaseerd model voortdurend hoeden voor inconsistenties, terwijl dit voor de conjunctiegebaseerde aanpak nauwelijks een rol speelt⁹. We kunnen in die zin ook aanvoelen dat terwijl implicatiegebaseerde regels staan voor onwrikbare zekerheden, conjunctiegebaseerde regels eerder als bodes van waargenomen, maar niet noodzakelijk bewezen of algemeen geldende, verbanden optreden. Anders uitgedrukt: voor een conjunctiegebaseerde regel volstaat het dat er voldoende positieve voorbeelden voorhanden zijn, terwijl het een implicatiegebaseerde regel er vooral om te doen is dat hij niet door de realiteit wordt tegengesproken (zie hiervoor ook het volgende hoofdstuk). Uiteraard behoort een scherpe aflijning van dit onderscheid niet steeds tot de mogelijkheden, zodat men er vaak baat bij heeft om verschillende interpretaties van dezelfde regel uit te proberen (zoals in het voorbeeld van de weersvoorspelling) om een beeld te krijgen van de min of meer uitgesloten, en

⁹Een lichtzinnige keuze van de regels kan op het niveau van de defuzzificatie evenwel tot problemen leiden. De klassieke doodoener op dat vlak (zie bv. [62]) is een systeem voor de aansturing van een wagen waarin de regels

ALS obstakel vóór of rechts van de wagen	DAN passeer langs links
ALS obstakel vóór of links van de wagen	DAN passeer langs rechts

voorkomen, en dat gegeven de waarneming “obstakel vóór de wagen”, de conclusies van beide regels samenbundelt tot “recht vooruit!”.

min of meer gegarandeerde waarden van de uitvoerveranderlijken op grond van deze regel.

Wat er ook van zij, wanneer beide types van regels samen voor hetzelfde probleem worden gebruikt (d.w.z. er zijn twee regelverzamelingen die aanleiding geven tot een conjunctiegebaseerd, resp. implicatiegebaseerd inferentieresultaat voor eenzelfde waarneming), verwacht men volgende elementaire integriteitsvoorwaarde van het tweeledige inferentieresultaat: nl., *dat een waarde voor de uitvoerveranderlijke door het positieve redeneermechanisme niet in een hogere mate wordt gegarandeerd dan de graad waarin ze op basis van de implicatiegebaseerde regels niet uitgesloten wordt.*

Indien dit geldt voor elke genormaliseerde waarneming over de invoerveranderlijken, zeggen we dat de beide regelverzamelingen *onderling consistent* zijn. Voor de eenvoud beperken we de definitie tot die gevallen waarbij de implicator I die gebruikt wordt voor het nemen van het subdirect beeld (de t -norm T die gebruikt wordt voor het nemen van het direct beeld) samenvalt met de I voor het modelleren van de implicatiegebaseerde regels (de T voor het modelleren van de conjunctiegebaseerde regels).

5.13 Definitie. Zij T een t -norm en I een implicator. Men noemt de regelverzamelingen (die we voor de eenvoud identificeren met hun vaagrelationele voorstelling)

$$\{T(A_i^1, B_i^1) \mid i = 1, \dots, n, A_i^1 \in \mathcal{F}(U), B_i^1 \in \mathcal{F}(V)\} \quad (5.33)$$

$$\{I(A_j^2, B_j^2) \mid j = 1, \dots, m, A_j^2 \in \mathcal{F}(U), B_j^2 \in \mathcal{F}(V)\} \quad (5.34)$$

onderling consistent indien geldt dat, voor genormaliseerde A' in $\mathcal{F}(U)$ en v in V ,

$$\inf_{u \in U} I \left(A'(u), \max_{i=1}^n T(A_i^1(u), B_i^1(v)) \right) \leq \sup_{u \in U} T \left(A'(u), \min_{j=1}^m I(A_j^2(u), B_j^2(v)) \right)$$

In de praktijk kan het testen van de onderlinge consistentie van regelverzamelingen vrij efficiënt gebeuren. We bewijzen daartoe eerst volgende hulpstellingen.

5.14 Hulpstelling. Zij T een t -norm en I een randimplicator, A^1, A^2 in $\mathcal{F}(U)$, B^1, B^2 in $\mathcal{F}(V)$. $\{T(A^1, B^1)\}$ en $\{I(A^2, B^2)\}$ zijn onderling consistent als en slechts als, voor elke (u, v) in $U \times V$,

$$T(A^1(u), B^1(v)) \leq I(A^2(u), B^2(v)) \quad (5.35)$$

Bewijs. Onderstel eerst dat (5.35) geldt voor (u, v) in $U \times V$. Zij dan A' in $\mathcal{F}(U)$

genormaliseerd, en beschouw u^* in $\ker(A')$. We bekommen achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} I(A'(u), T(A^1(u), B^1(v))) &\leq I(A'(u^*), T(A^1(u^*), B^1(v))) \\ &\leq T(A^1(u^*), B^1(v)) \\ &\leq I(A^2(u^*), B^2(v)) \\ &\leq \sup_{u \in U} T(A'(u), I(A^2(u), B^2(v))) \end{aligned}$$

Anderzijds, onderstel dat $\{T(A^1, B^1)\}$ en $\{I(A^2, B^2)\}$ onderling consistent zijn. Zij (u^*, v) in $U \times V$ en $A' = \{u^*\}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} I(A'(u), T(A^1(u), B^1(v))) &\leq \sup_{u \in U} T(A'(u), I(A^2(u), B^2(v))) \\ \iff T(A^1(u^*), B^1(v)) &\leq I(A^2(u^*), B^2(v)) \end{aligned}$$

m.a.w., het gestelde. □

5.15 Hulpstelling. Zij T een t -norm en I een randimplicator, A^1, A^2 in $\mathcal{F}(U)$, B^1, B^2 in $\mathcal{F}(V)$. Als $A^1 \cap A^2 = \emptyset$, dan zijn $\{T(A^1, B^1)\}$ en $\{I(A^2, B^2)\}$ steeds consistent.

Bewijs. Zij (u, v) in $U \times V$. Indien $A^1(u) > 0$ dan volgt uit $A^2(u) = 0$ dat $I(A^2(u), B^2(v)) = 1$. Anderzijds, indien $A^2(u) > 0$, dan zal $T(A^1(u), B^1(v)) = 0$. In beide gevallen is dus $T(A^1(u), B^1(v)) \leq I(A^2(u), B^2(v))$, zo dat gelet op Hulpstelling 5.14 het gestelde geldig is. □

5.16 Stelling. De regelverzamelingen (5.33) en (5.34) zijn onderling consistent zodra voor elke A_i^1 en A_j^2 (i in $\{1, \dots, n\}$ en j in $\{1, \dots, m\}$) de singletons $\{T(A_i^1, B_i^1)\}$ en $\{I(A_j^2, B_j^2)\}$ onderling consistent zijn.

Bewijs. Uit de onderstelling volgt, wegens Hulpstelling 5.14, dat voor $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, (u, v) in $U \times V$ geldt:

$$T(A_i^1(u), B_i^1(v)) \leq I(A_j^2(u), B_j^2(v))$$

zo dat ook

$$\max_{i=1}^n T(A_i^1(u), B_i^1(v)) \leq \min_{j=1}^m I(A_j^2(u), B_j^2(v))$$

Voor genormaliseerde A' in $\mathcal{F}(U)$ waarvoor u^* in $\ker(A')$ geldt dan

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} I\left(A'(u), \max_{i=1}^n T(A_i^1(u), B_i^1(v))\right) &\leq I\left(A'(u^*), \max_{i=1}^n T(A_i^1(u^*), B_i^1(v))\right) \\ &\leq T\left(A'(u^*), \min_{j=1}^m I(A_j^2(u^*), B_j^2(v))\right) \\ &\leq \sup_{u \in U} T\left(A'(u), \min_{j=1}^m I(A_j^2(u), B_j^2(v))\right) \end{aligned}$$

□

Het nagaan van de onderlinge consistentie is derhalve beperkt tot koppels van regels met gedeeltelijk overlappende antecedenten die tot verschillende regelverzamelingen behoren.

In het geval van onderling consistente regelverzamelingen vormt het resultaat blijkbaar een IWV $B' = (B'_1, B'_2)$ in V . Dit hoeft geenszins verwondering te wekken. $B'_1 = \Box B'$ is het “zekere”, gegarandeerde gedeelte van de conclusie, terwijl $B'_2 = \Diamond B'$ het maximaal mogelijke, niet expliciet uitgesloten scenario beschrijft. In die zin brengt vaaginferentie net zoals vaagruwverzamelingenleer een constructietechniek voor L^* -vaagverzamelingen, wat nogmaals de relevantie van laatstgenoemde modellen onderstreept.

Het bekomen inferentieresultaat kan op verschillende manieren verder worden verwerkt. Naast defuzzificatie (die best trapsgewijs verloopt: van IWV naar vaagverzameling¹⁰ en vervolgens naar scherpe waarde) behoort ook linguïstische benadering tot de mogelijkheden; hierbij benadert men B' in de mate van het mogelijke door een geschikte linguïstische term. [64] Het resultaat kan uiteraard ook worden geketend, waarbij men ofwel eerst B' omzet tot een vaagverzameling, wat een zeker verlies aan informatie met zich meebrengt, ofwel in de volgende stap een redeneermechanisme voor L^* -vaagverzamelingen (met aangepaste regelverzameling) voorziet¹¹, wat evenwel de interpreteerbaarheid en de complexiteit van de gemaakte redeneringen negatief beïnvloedt.

5.1.5 Algoritmische Complexiteit

Een belangrijk nadeel van de methodes die we in de vorige paragraaf hebben toegelicht is hun hoge complexiteit. Het struikelblok vormt de evaluatie van het supremum (resp. infimum) in $R \uparrow_T A'$ (resp. $R \triangleleft_I A'$). Merk terloops op dat die berekening, die in het algemeen een exhaustief doorlopen van het universum vergt, voor oneindige universa de computer het nakijken geeft. Zoals voor veel numerieke toepassingen het geval is (bv. numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen) kan men de oplossing dikwijls voldoende nauwkeurig benaderen mits gebruik te maken van een discretiseringsproces, i.e. de betreffende lidmaatschapsfuncties worden geëvalueerd in een aantal knooppunten waarmee alle berekeningen gebeuren (zie bv. [20]). De algoritmes gedragen zich dan als een variant op matrixcalculus.

5.17 Voorbeeld. Beschouw veranderlijken X en Y die waarden aannemen in $\mathbb{R}$ en genormaliseerde vaagverzamelingen A, A' en B in $\mathbb{R}$. Gegeven de uitspraak “Als X is A dan Y is B ” die we modelleren als de conjunctiegebaseerde vaagregel $T(A, B)$, T een t -norm, en de waarneming “ X is A' ”, passen we de methode voor positief redeneren a.d.h.v. het subdirect beeld (met implicator I) toe.

We vatten aan met enkele gemakkelijk te vervullen veronderstellingen, gegeven $a_1 < b_1$ en $a_2 < b_2$:

¹⁰Bijvoorbeeld, door het gemiddelde van de boven- en onderlidmaatschapsfunctie te berekenen.

¹¹Gelet op de resultaten uit Hoofdstuk 3 kunnen de hier beschreven methodes geruisloos worden uitgebreid (zie ook [31, 38])

$$\begin{aligned} \text{supp}(A) &\subseteq [a_1, b_1] \\ \text{supp}(B) &\subseteq [a_2, b_2] \\ \text{supp}(A') &\subseteq [a_1, b_1] \end{aligned}$$

Voor $k > 0$, $l > 0$ definiëren we vervolgens partities van de intervallen $[a_1, b_1]$ en $[a_2, b_2]$:

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + \frac{i}{k}(b_1 - a_1) \quad i = 0, \dots, k \\ v_j &= a_2 + \frac{j}{l}(b_2 - a_2) \quad j = 0, \dots, l \end{aligned}$$

De ontstane u_i ($i = 0, \dots, k$) en v_j ($j = 0, \dots, l$) noemen we de knooppunten. We evalueren vervolgens de vaagverzamelingen uit antecedent en consequent in de overeenkomstige knooppunten om zodoende vectoren α in $\mathbb{R}^{k+1}$ en β in $\mathbb{R}^{l+1}$ te bekomen:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A(u_0) \\ A(u_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ A(u_k) \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} B(v_0) \\ B(v_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ B(v_l) \end{pmatrix}$$

α en β kan men vooraf berekenen en vervolgens samen met de knooppunten opslaan in het systeem. Ze zijn te beschouwen als vaagverzamelingen in de discrete universa $K = \{u_i | i = 0, \dots, k\}$ en $L = \{v_j | j = 0, \dots, l\}$. Voor elke nieuwe waarneming A' van X kan men dan op analoge wijze een vector α' construeren. Vectoren hebben het voordeel dat zij als representatieformalisme zeer flexibel zijn, zodat het dan ook voor de hand ligt de uitvoer eveneens onder deze vorm aan te bieden.

De knooppunten bepalen het universum $K \times L$ van de vaagrelatie $R = T(A, B)$. We tonen R , waarvoor de lidmaatschapsgraden eveneens vooraf kunnen bepaald worden, hier in matrixvorm.

$$R = \begin{pmatrix} T(A(u_0), B(v_0)) & T(A(u_0), B(v_1)) & \dots & T(A(u_0), B(v_l)) \\ T(A(u_1), B(v_0)) & T(A(u_1), B(v_1)) & \dots & T(A(u_1), B(v_l)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T(A(u_k), B(v_0)) & T(A(u_k), B(v_1)) & \dots & T(A(u_k), B(v_l)) \end{pmatrix}$$

Rest ons enkel nog de inferentiestap uit te voeren, i.e. $\beta' = R \triangleleft_I \alpha'$ te berekenen, waarbij de inf-bewerking kan vervangen worden door het nemen van het minimum over een eindig aantal elementen.

$$\beta' = \begin{pmatrix} \min(I(A'(u_0), T(A(u_0), B(v_0))), \dots, I(A'(u_k), T(A(u_k), B(v_0)))) \\ \min(I(A'(u_0), T(A(u_0), B(v_1))), \dots, I(A'(u_k), T(A(u_k), B(v_1)))) \\ \vdots \\ \min(I(A'(u_0), T(A(u_0), B(v_l))), \dots, I(A'(u_k), T(A(u_k), B(v_l)))) \end{pmatrix}$$

Het resultaat is een vector in $[0, 1]^{l+1}$ en dus ook een vaagverzameling in L . Het gebruik van de matrix–vectornotatie toont eveneens dat de procedure sterk gelijkt op matrixvermenigvuldiging, waarbij het product vervangen is door de t–norm T en de sommatie door het infimum over de rijen van de matrix R . Het verwantschap met vector- en matrixbewerkingen laat o.m. toe dat de talrijke beschikbare en efficiënte algoritmen voor verwerking op parallelle processoren ons bij de implementatie behulpzaam kunnen zijn.

Het voorbeeld leert ons ook dat de uitvoeringscomplexiteit van het gebruikte algoritme, en ook van de methode op basis van de CRI, van de orde $\mathcal{O}(kl)$ is met $k = |U|$ en $l = |V|$, wat in de praktijk wel eens dreigt op te lopen. In het geval van meerdere regels heeft FATI daarbij nog het voordeel op FITA dat de rekenkost van de aggregatie niet in ware tijd hoeft te gebeuren, wat in het geval van een groot aantal regels een belangrijke tijdsbesparende factor kan zijn. Anderzijds vergt elke aanpassing van de regelverzameling bij FATI een hoge rekenkost daar alle vaagregels opnieuw dienen geaggregeerd, en zorgt voor regelverzamelingen met veel invoerveranderlijken, waarvan er in elke regel slechts enkele voorkomen, de hoge dimensionaliteit bij FATI eveneens voor overlast.

Vergelijk dit met de vaagregelaar van Mamdani en Assilian. Evaluatie van formule (5.5) kan in constante tijd, zodat de totale complexiteit per regel slechts $\mathcal{O}(l)$ bedraagt. Anderzijds is de verguisde methode voor positief redeneren op grond van de CRI (cfr. formule (5.23)) klaar in $\mathcal{O}(k + l)$ tijd (gelet op de slechts eenmalig vereiste berekening van $OV L_T(A', A_i)$).

Wanneer echter t.z.t. een implicator en een t–norm op de proppen komen, zijn voor niet–scherpe invoerwaarden geen algemene vereenvoudigingstechnieken bekend, althans niet voor de meest interessante combinaties van connectieven¹². In de volgende sectie gaan we daarom op zoek naar efficiënte *benaderingstechnieken* voor de hier uiteengezette redeneermethoden, waarbij we naast het criterium van de uitvoeringstijd ook en vooral het behoud van de semantiek van redeneren met positieve en negatieve informatie voorop stellen.

5.2 Redeneren door Analogie

Eén van de voornaamste drijfveren achter benaderend redeneren is dat het ons in staat kan stellen om een proces te automatiseren waarin wij mensen erg sterk

¹²Zoals reeds aangehaald zijn dat typisch een t–norm en zijn residuele implicator (zie ook de volgende sectie).

zijn: het trekken van analogieën. Een rechter put inspiratie uit uitspraken in gelijkaardige zaken wanneer de letter van de wet hem in de steek laat; andermans handschrift, hoewel niet identiek aan het onze, zijn we door de band genomen wel in staat te ontcijferen; elke luchthaven is weer anders georganiseerd maar toch missen we daardoor onze vlucht niet, ...

Hoewel we dit toen niet hebben geëxpliciteerd, schuilt ook in de inferentiemethoden die we in Sectie 5.1 de revue hebben laten passeren dit principe, dat een vorm van continuïteit uitdrukt: gelijkaardige waarnemingen leiden tot gelijkaardige inferentieresultaten. Zoals Bouchon–Meunier et al. [19] opmerken m.b.t. de methode gebaseerd op de CRI, “*The link between A' and B' is given by the generalized modus ponens¹³ itself, and the similarities regarding Y are obtained as consequences*”. In Sectie 5.2.1 brengen we een aantal begrippen en resultaten aan die deze uitspraak hard maken.

Parallel aan deze “deductieve” aanpak werd ook een aantal methodes in het leven geroepen die vertrekken van het verband (de analogie) tussen A' en A waaruit ze de nodige inspiratie putten om de conclusie B' te construeren. Het meest voor de hand liggend is om hierbij gebruik te maken van similariteitsmaten (Sectie 5.2.2); aan deze strategie zijn echter een aantal fundamentele tekortkomingen verbonden, die ons ertoe hebben gebracht in Sectie 5.2.3 een inferentiemethode op basis van een inclusiemaat te introduceren.

Voor verder gebruik, en om vergelijkingen tussen de diverse aanpakken toe te laten, introduceren we formeel het begrip “ U – V inferentiemethode” als een $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ afbeelding $\mathcal{C}$, die met elke waarneming A' de corresponderende conclusie $B' = \mathcal{C}(A')$ laat overeenstemmen; we gaan er daarbij van uit dat aan de methode een regelverzameling K , bestaande uit vaagregels van de vorm “ALS X is A_i DAN Y is B_i ” ($i = 1, \dots, n$) met A_i in $\mathcal{F}(U)$ en B_i in $\mathcal{F}(V)$, ten grondslag ligt. Daar met de regels niet noodzakelijk vaagrelaties hoeven te corresponderen, dienen we hen in de praktijk ook expliciet het etiket “positief” of “negatief” op te plakken, afhankelijk of hun doel het afleiden van restricties dan wel garanties is.

5.2.1 Similariteit en Extensionaliteit

Om de gelijk(aardig)heid van twee vaagverzamelingen te meten is in de literatuur (zie o.m. [104, 124, 146]) een grote verscheidenheid aan maten voorhanden, die in de regel een element van $[0,1]$ opleveren¹⁴. Grof gesteld kunnen we de diverse aanpakken opdelen in logisch–gebaseerde, verzamelinggebaseerde en afstandsgebaseerde maten. Volgende definitie tracht uit die verscheidenheid de grootste gemene deler te extraheren¹⁵.

¹³Ze doelen hiermee in feite op de CRI.

¹⁴Sommige auteurs zoals Yager [136] formuleerden ook maten die vaagverzamelingen teruggeven; we laten deze hier echter buiten beschouwing.

¹⁵Merk op dat we door de reflexiviteitseis zogenaamde overlapmaten zoals $OVLT$ uit Sectie 3.3.1 die soms ook bij de similariteitsmaten worden ondergebracht, uitsluiten.

5.18 Definitie (Similariteitsmaat). Onder een similariteitsmaat over U verstaan we elke reflexieve en symmetrische $\mathcal{F}(U)^2 \rightarrow [0, 1]$ afbeelding S .

5.19 Voorbeeld. Uit de vaststelling dat voor scherpe verzamelingen A en B in U geldt dat

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

kunnen we met de inclusiematoren uit Sectie 3.2.2 o.m. volgende logisch-gebaseerde similariteitsmaat over U opbouwen, voor I een implicator en T een t-norm op $[0, 1]$, A, B in $\mathcal{F}(U)$,

$$\begin{aligned} SIM_1(A, B) &= T(INC_I(A, B), INC_I(B, A)) \\ &= T\left(\inf_{u \in U} I(A(u), B(u)), \inf_{u \in U} I(B(u), A(u))\right) \end{aligned}$$

Een analoge constructie voor de verzamelinggebaseerde inclusiematoren is mogelijk. In de praktijk ontmoet men vaker de zogenaamde Jaccard coëfficiënt, gegeven als, voor A, B in $\mathcal{F}(U)$, U een eindig universum,

$$SIM_2(A, B) = \begin{cases} \frac{|A \cap_T B|}{|A \cup_S B|} & \text{als } A \cup_S B \neq \emptyset \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

waarbij T een t-norm en S een t-conorm is; het is een recht toe recht aan uitbreiding van volgende klassieke formule voor gelijkheid van scherpe verzamelingen A en B in U :

$$A = B \iff A \cup B = \emptyset \text{ of } \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = 1$$

Men kan de gelijkheid van vaagverzamelingen in een eindig universum U ook nagaan door de afstand te bepalen tussen de vectoren die hun lidmaatschapsgraden beschrijven. Zo berekent men de “euclidische” afstand tussen A en B in U als

$$SIM_3(A, B) = \frac{1}{|U|} \sqrt{\sum_{u \in U} (A(u) - B(u))^2}$$

Elk van de bekomen similariteitsmaten beschikt uiteraard over haar specifieke eigen karakteristieken, die men in overweging dient te nemen bij het gebruik ervan in een toepassing. Een uitgebreide vergelijkende studie werd opgezet in [104].

Het is ook mogelijk om voor de constructie van een geschikte similariteitsmaat te vertrekken van de definitie van een vage T -equivalentierelatie zoals we die hebben ingevoerd in Definitie 3.48. We brengen daartoe eerst het begrip biresiduele operator in herinnering (zie bv. [45]).

5.20 Definitie (Biresiduele operator). Zij T een t-norm op $[0, 1]$. Onder de biresiduele operator E_T van T verstaat men de $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ afbeelding bepaald door, voor x, y in $[0, 1]$,

$$E_T(x, y) = \min(I_T(x, y), I_T(y, x)) \quad (5.38)$$

Voor links-continue T is E_T een vage T -equivalentierelatie over $[0,1]$. Men kan hieruit een vage T -equivalentierelatie over $\mathcal{F}(U)$ (en dus a fortiori een similariteitsmaat over U) distilleren (zie o.m. [15, 45, 124]) die we hier T -gelijkheidsmaat noemen.

5.21 Definitie (T -gelijkheidsmaat). Zij T een links-continue t-norm op $[0,1]$. Onder de T -gelijkheidsmaat over U verstaat men de similariteitsmaat SIM_T over U , bepaald door, voor A_1, A_2 in $\mathcal{F}(U)$,

$$SIM_T(A_1, A_2) = \inf_{u \in U} E_T(A_1(u), A_2(u)) \quad (5.39)$$

5.22 Opmerking. Een kritische lezer zou fijntjes kunnen opmerken dat we het voorbehoud dat we in Hoofdstuk 4 jegens T -transitiviteit als eigenschap voor een model van benaderende gelijkheid hebben gemaakt hier blijkbaar laten varen. Merk echter op dat we SIM_T in de eerste plaats gebruiken als een technisch (kwantitatief) hulpmiddel om de gelijkheid van twee vaagverzamelingen, gezien als collecties van lidmaatschapsgraden, na te gaan, wat beslist een andere zaak is dan het (kwalitatief) nagaan van de gelijkaardigheid (ononderscheidbaarheid) tussen objecten. Getuige daarvan trouwens ook het feit dat SIM_T bovenop de gekende eigenschappen van een vage T -equivalentierelatie ook voldoet aan $SIM_T(A, B) = 1 \iff A = B$.

Volgende definitie put haar inspiratie uit [15] en zal ons toelaten om van bepaalde inferentiemethoden het vermogen tot “redeneren door analogie” te testen.

5.23 Definitie (Extensionaliteit). Zij T een links-continue t-norm. We noemen een U - V inferentiemethode $\mathcal{C}$ *extensioneel* m.b.t. SIM_T indien voor willekeurige A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$ geldt:

$$SIM_T(\mathcal{C}(A'_1), \mathcal{C}(A'_2)) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$$

Extensionaliteit vertolkt het uitgangspunt dat een inferentiemethode similariteit bewaart, d.w.z. dat naburige invoerwaarden nooit aanleiding geven tot sterk uiteenlopende uitvoerwaarden. Bouchon-Meunier et al. [19] beschouwen een variant van dit principe, nl. gegeven de regel “ALS X is A DAN Y is B ” en de waarneming A' eisen zij dat voor de conclusie B' (A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$) zou gelden: $SIM_T(B, B') \geq SIM_T(A, A')$, m.a.w., hoe nauwer A' aansluit bij het antecedent van de regel, hoe dichter de conclusie bij diens consequent ligt.

De volgende stellingen tonen aan dat het voor de inferentiemethoden met positieve en negatieve regels uit de vorige sectie, mits een gedegen keuze van de optredende connectieven, in de meeste gevallen mogelijk is om extensionaliteit met betrekking tot een welbepaalde T -gelijkheidsmaat te garanderen.

5.24 Stelling. [15] Zij T een links-continue t-norm, R een vaagrelatie tussen U en V , A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$. Dan geldt: $SIM_T(R \uparrow_T A'_1, R \uparrow_T A'_2) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$.

5.25 Gevolg. De U - V inferentiemethode voor het redeneren met negatieve informatie op basis van de CRI met t -norm T , willekeurige implicator I en FATI-aggregatie is extensioneel m.b.t. SIM_T zodra T links-continu is.

5.26 Stelling. Zij T een links-continue t -norm, $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ een willekeurige familie van extensionele U - V inferentiemethoden m.b.t. SIM_T . Dan zijn $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ bepaald door, voor A' in $\mathcal{F}(U)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A') &= \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i(A') \\ \mathcal{D}(A') &= \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i(A')\end{aligned}$$

eveneens extensioneel m.b.t. SIM_T .

Bewijs. We tonen de stelling aan voor $\mathcal{D}$ (voor $\mathcal{C}$ is het bewijs terug te vinden in [15]). Zij A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$, v in V , dan vinden we achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}I_T(\mathcal{D}(A'_1)(v), \mathcal{D}(A'_2)(v)) &= I_T\left(\sup_{i \in I} \mathcal{C}_i(A'_1)(v), \sup_{i \in I} \mathcal{C}_i(A'_2)(v)\right) \\ &\geq \inf_{i \in I} I_T(\mathcal{C}_i(A'_1)(v), \mathcal{C}_i(A'_2)(v)) \\ &\geq \inf_{i \in I} E_T(\mathcal{C}_i(A'_1)(v), \mathcal{C}_i(A'_2)(v)) \\ &\geq \inf_{i \in I} \inf_{v' \in V} E_T(\mathcal{C}_i(A'_1)(v'), \mathcal{C}_i(A'_2)(v')) \\ &= \inf_{i \in I} SIM_T(\mathcal{C}_i(A'_1), \mathcal{C}_i(A'_2)) \\ &\geq SIM_T(A'_1, A'_2)\end{aligned}$$

Analoog geldt ook $I_T(\mathcal{D}(A'_2)(v), \mathcal{D}(A'_1)(v)) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$, zodat we kunnen besluiten dat ook $SIM_T(\mathcal{D}(A'_1), \mathcal{D}(A'_2)) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$. $\square$

5.27 Gevolg. De U - V inferentiemethode voor het redeneren met negatieve informatie op basis van de CRI met t -norm T , willekeurige implicator I en FITA-aggregatie is extensioneel m.b.t. SIM_T zodra T links-continu is.

5.28 Stelling. Zij T een links-continue t -norm, R een vaagrelatie tussen U en V , A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$. Dan geldt: $SIM_T(R \triangleleft_{I_T} A'_1, R \triangleleft_{I_T} A'_2) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$.

Bewijs. Voor willekeurige v in V geldt

$$\begin{aligned}&I_T((R \triangleleft_{I_T} A'_1)(v), (R \triangleleft_{I_T} A'_2)(v)) \\ &= I_T\left(\inf_{u \in U} I_T(A'_1(u), R(u, v)), \inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), R(u, v))\right) \\ &\geq \inf_{u \in U} I_T(I_T(A'_1(u), R(u, v)), I_T(A'_2(u), R(u, v))) \\ &= \inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), A'_1(u)) \\ &\geq \inf_{u \in U} E_T(A'_1(u), A'_2(u)) \\ &= SIM_T(A'_1, A'_2)\end{aligned}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van eigenschap 8 uit Stelling 2.29. Analogie geldt ook $I_T((R \triangleleft_{I_T} A'_2)(v), (R \triangleleft_{I_T} A'_1)(v)) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$, zodat we kunnen besluiten dat $SIM_T(R \triangleleft_{I_T} A'_1, R \triangleleft_{I_T} A'_2) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$. $\square$

5.29 Gevolg. De U - V inferentiemethode voor het redeneren met positieve informatie op basis van het subdirect beeld met t -norm T , $I = I_T$ en FATI- of FITA-aggregatie is extensioneel m.b.t. SIM_T zodra T links-continu is.

Wanneer de gebruikte implicator I in de positieve redeneermethode niet gelijk is aan I_T , kan de redenering uit het bewijs niet worden gevolgd. Het volgende voorbeeld toont aan dat, zelfs al worden de regels opgebouwd a.d.h.v. een links-continue t -norm T , extensionaliteit m.b.t. SIM_T dan niet noodzakelijk geldt.

5.30 Voorbeeld. Zij $U = V = \{u_1, u_2\}$ en zij daarnaast de vaagverzamelingen $A, A'_1, A'_2, B, B'_1, B'_2$ in U gegeven als

	A	A'_1	A'_2	B	B'_1	B'_2
u_1	1	1	0.9	1	0.3	0.2
u_2	0.2	0.7	1	0	0	0

Men kan nagaan dat, indien $R = T_M(A, B)$,

$$B'_1 = R \triangleleft_{I_{S_M}} A'_1 \quad (5.40)$$

$$B'_2 = R \triangleleft_{I_{S_M}} A'_2 \quad (5.41)$$

Daar $SIM_{T_M}(A'_1, A'_2) = 0.7 > SIM_{T_M}(B'_1, B'_2) = 0.2$ is de inferentiemethode niet extensioneel m.b.t. SIM_{T_M} .

Het is echter vaak mogelijk om extensionaliteit m.b.t. een andere t -norm te garanderen. Volgende stelling, die o.m. toepasbaar is op de configuratie uit het voorbeeld, illustreert dit principe.

5.31 Stelling. Zij $T = T_W$, en $T' = T_P$ of $T' = T_M$, $I = I_{S', N_s}$ waarbij S' de duale is van T' m.b.t. N_s , R een vaagrelatie tussen U en V , A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$. Dan geldt: $SIM_T(R \triangleleft_I A'_1, R \triangleleft_I A'_2) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$.

Bewijs. Voor willekeurige v in V geldt

$$\begin{aligned}
& I_T((R \triangleleft_I A'_1)(v), (R \triangleleft_I A'_2)(v)) \\
&= I_T \left(\inf_{u \in U} I(A'_1(u), R(u, v)), \inf_{u \in U} I(A'_2(u), R(u, v)) \right) \\
&= I_T \left(N_s \left(\sup_{u \in U} T'(A'_1(u), N_s(R(u, v))) \right), N_s \left(\sup_{u \in U} T'(A'_2(u), N_s(R(u, v))) \right) \right) \\
&= I_T \left(\sup_{u \in U} T'(A'_2(u), N_s(R(u, v))), \sup_{u \in U} T'(A'_1(u), N_s(R(u, v))) \right) \\
&\geq \inf_{u \in U} I_T(T'(A'_2(u), N_s(R(u, v))), T'(A'_1(u), N_s(R(u, v)))) \\
&\geq \inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), A'_1(u)) \\
&\geq \inf_{u \in U} E_T(A'_2(u), A'_1(u))
\end{aligned}$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van Stelling 5.12, de contrapositiviteit (A.3) van I_T en het feit dat eigenschap 7 uit Stelling 2.29 behouden blijft wanneer men T vervangt door T_M of T_P . Analooog geldt ook $I_T((R \triangleleft_I A'_2)(v), (R \triangleleft_I A'_1)(v)) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$, zodat we kunnen besluiten dat $SIM_T(R \triangleleft_I A'_1, R \triangleleft_I A'_2) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$. $\square$

5.2.2 Similariteitsgebaseerd Redeneren

Similariteitsmaten spelen niet enkel een rol bij de validatie (in de zin van extensionaliteit) van regelgebaseerde systemen; in de voorbije twee decennia werden ze ook een sleutelrol toegedicht in het vereenvoudigen van de implementatie van de Veralgemeende Modus Ponens en het omzeilen van de “anomalieën” die de op de CRI gebaseerde methodes teisterden¹⁶.

Similariteitsgebaseerd redeneren, dat we hier behandelen als een bijzondere U – V inferentiemethode, valt onder de zeer ruime noemer van *analogische* of *gevalgebaseerde* redeneeralgoritmen (case-based reasoning algorithms), waarvan de taakomschrijving ruwweg omschreven kan worden als [18]: “*inferring, from a known case which is similar enough to the encountered situation, that what is true in the known case might still be true or approximate true in this situation*”.

Teruggebracht tot haar essentie omvat similariteitsgebaseerd redeneren de volgende twee belangrijke stappen (we gaan uit van een enkele regel “ALS X is A dan Y is B ” en een waarneming “ X is A' ”):

1. **Vergelijking.** A' wordt vergeleken met A op basis van een similariteitsmaat SIM , m.a.w. $\alpha = SIM(A', A)$ wordt bepaald.
2. **Modificatie.** Het consequent B wordt omgevormd tot de conclusie B' a.d.h.v.

$$B'(v) = f(\alpha, B)(v) \quad (5.42)$$

waarbij men f een modificatie–afbeelding noemt.

5.32 Voorbeeld. Türkşen en Zhong [127] bouwden in zekere zin de meest prototypische en algemene implementatie van similariteitsgebaseerd redeneren, waarbij ze vertrekken van een regelverzameling K met n vaagregels van de vorm “ALS X is A_i DAN Y is B_i ” (A_i in $\mathcal{F}(U)$, B_i in $\mathcal{F}(V)$, $i = 1, \dots, n$), een vrij te kiezen similariteitsmaat SIM , een drempelwaarde τ in $[0, 1]$ voor SIM en een modificatie–afbeelding f . Regels worden pas gelanceerd (d.w.z. een partiële conclusie $f(SIM(A', A_i), B_i)$ wordt geconstrueerd) wanneer $SIM(A', A_i) \geq \tau$. Als mogelijke kandidaat–afbeeldingen suggereerden ze o.m. f_1 en f_2 bepaald door, voor α in $]0, 1]$, v in V ,

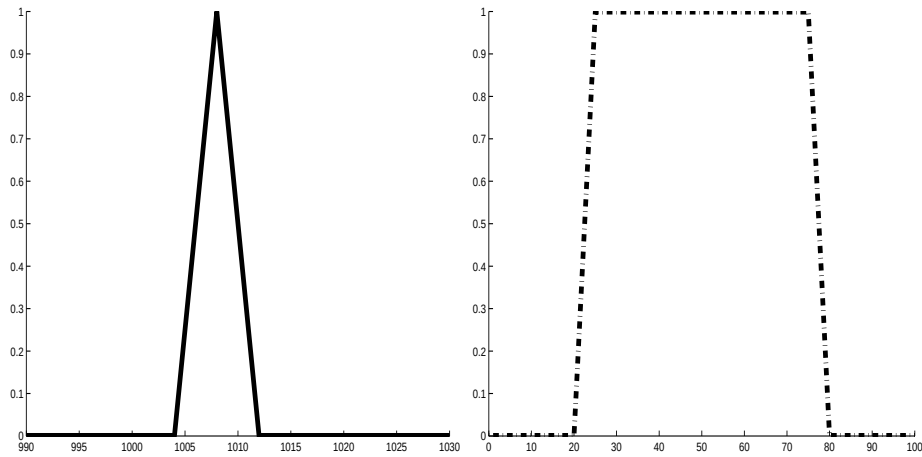
$$\begin{aligned} f_1(\alpha, B_i)(v) &= \min\left(1, \frac{B_i(v)}{\alpha}\right) \\ f_2(\alpha, B_i)(v) &= \alpha B_i(v) \end{aligned}$$

¹⁶Enkele van die zogenaamde “tekortkomingen” werden ontzenuwd in Sectie 5.1; andere hebben dan weer te maken met de keuze van de gebruikte connectieven en de specificatie van de regelverzameling, zaken waarover in recente jaren onze kennis sterk is toegenomen.

f_1 en f_2 , die Türksen en Zhong benoemden als “min-of-meer” vorm en reductievorm respectievelijk, imiteren bepaalde gedragingen die we reeds kennen van het implicatie-, resp. conjunctiegebaseerd model van vaaginferentie, met name, het gradueel uitbreiden van de kern van B_i in f_1 en het inkrimpen van B_i door een homothetie in f_2 . De finale (FITA-)aggregatie volgt in [127] door disjunctieve combinatie van de individuele resultaten, alhoewel dit niet te verzoenen lijkt met het gebruik van f_1 , in welk geval eerder conjunctieve combinatie op zijn plaats lijkt.

Wat er ook van zij, qua efficiëntie laat de methode de CRI mijlenver achter zich. Gegeven $|U| = k$, $|V| = l$ en het feit dat de meeste similariteitsmaten van de orde $\mathcal{O}(k)$ zijn, bedraagt de totale tijdscomplexiteit van een redeneerstap niet meer dan $\mathcal{O}(k + l)$.

Ook is het eenvoudig om na te gaan dat wanneer $A' = A_i$, het i -de partiële inferentieresultaat gelijk is aan B_i ; mits een aantal elementaire voorwaarden op SIM en de keuze van de antecedenten van de vaagregels is behoud van de modus ponens dus een haalbare kaart voor dit algoritme.



Figuur 5.12: a) *luchtdruk* = ongeveer 1008 hPa b) Inferentieresultaat met Türksen en Zhongs methode voor de invoer uit a) en *luchtdrukschommeling* = *stabil* met $SIM = SIM_{Tw}$ en $f = f_1$.

Het gaat de methode echter minder voor de wind wanneer A' verschillend is van elke A_i . Om dit te illustreren beschouwen we de regel “ALS de luchtdruk laag is en de luchtdrukschommeling stabiel, DAN is de neerslagkans reëel” uit Tabel 5.4. In Figuur 5.12 a) is een mogelijke voorstelling weergegeven van de imprecieze meting “de luchtdruk is ca. 1008 hPa”, die m.a.w. een typisch scenario van lage luchtdruk beschrijft. Het inferentieresultaat voor deze invoer en een stabiele luchtdrukschommeling, gebruikmakend van de similariteitsmaat SIM_{Tw} en de “min-of-meer” vorm, wijkt echter af van “reëel” doordat de simi-

lariteit tussen antecedent en waarneming slechts 0.2 bedraagt. Wat veel erger is, indien men de invoer nog specifieker maakt, door bv. luchtdruk de exacte waarde 1008 hPa toe te kennen, zakt de similariteitswaarde tot 0 en krijgt men als resultaat het volledige universum $[0, 100]$ —een volstrekt betekenisloos antwoord. Men kan nagaan dat het gebruik van een alternatieve similariteitsmaat (bv. één van de voorgestelde maten uit Voorbeeld 5.19) geen soelaas brengt.

5.2.3 Inclusiegebaseerd Redeneren

Voorbeeld 5.32 brengt een belangrijk tekort van similariteitsgebaseerd redeneren aan het licht: daar het algoritme zich toespitst op de mate van gelijkheid tussen de waarneming A' en het antecedent A , weet het geen raad met invoerwaarden die een specifiek geval van het antecedent (bv. een scherpe waarde uit $\ker(A)$) beschrijven, en waarvoor de vaagregel dus ten stelligste van kracht is. Dit hoeft echter niet te betekenen dat redeneren door analogie een lege doos zou zijn, of dat het efficiënte algoritme uit de vorige paragraaf niet in harmonie kan gebracht worden met de redeneermethoden voor positieve en negatieve informatie uit Sectie 5.1. Immers, wanneer men bedenkt dat het antecedent van een vaagregel “ALS X is A DAN Y is B ” als elastische restrictie een *voorwaarde* vastlegt (namelijk, dat de mogelijke waarden van X beperkt zouden zijn tot A) die in mindere of meerdere mate kan worden vervuld door A' , beseft men dat het niet een similariteitsmaat maar wel een inclusiemaat is die men nodig heeft.

Inclusiegebaseerd Redeneren met Eén Vaagregel

Waar we in feite naar op zoek zijn is een inferentiemethode die t.z.t. efficiënt is en de belangrijkste karakteristieken van het redeneren met a) negatieve en b) positieve regels respecteert. Om de gedachten te vestigen tonen we voor a) en b) in Tabel 5.5 en 5.6 telkens een drietal eigenschappen waarvan we de vervulling als vanzelfsprekend beschouwen. Zo geeft bv. (N.1) aan dat, als het doel van de regel is om een aantal waarden van de uitvoerveranderlijke min of meer uit te sluiten, de opgelegde restrictie nooit strenger mag zijn dan het consequent B van de regel; merk terloops op dat dit de normalisatie van het inferentieresultaat B' voor gevolg heeft. Anderzijds, naarmate meer waarden mogelijk worden voor X , gebeurt hetzelfde voor Y wegens (N.2). Het behoud van de modus ponens tenslotte is gegarandeerd door (N.3). Analoge bemerkingen gelden voor de eigenschappen (P.1) t.e.m. (P.3) die het redeneren met positieve regels in goede banen leiden.

Men gaat eenvoudig na dat de eigenschappen (N.1) t.e.m. (N.3) steeds vervuld zijn indien men gebruik maakt van de methode voor negatieve regels op grond van de CRI met een links–continue t –norm T en zijn residuele implicator I_T ; analoog gelden (P.1) t.e.m. (P.3) voor de subdirect–beeld methode met dezelfde keuze voor de connectieven.

Deze eigenschappen laten ook toe om zwart op wit aan te tonen waar, wat similariteitsgebaseerd redeneren betreft, het schoentje knelt: men leidt immers gemakkelijk af dat uit (N.1) t.e.m. (N.3), resp. (P.1) t.e.m. (P.3), volgt

(N.1)	$B \subseteq B'$	(B is de meest specifieke afleidbare restrictie)
(N.2)	$A'_1 \subseteq A'_2 \Rightarrow B'_1 \subseteq B'_2$	(monotoniteit)
(N.3)	$A' = A \Rightarrow B' = B$	(behoud van modus ponens)

Tabel 5.5: Voorwaarden voor benaderend redeneren uit een negatieve vaagregel “ALS X is A DAN Y is B ” en de waarneming “ X is A' ” (A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$).

(P.1)	$B' \subseteq B$	(B is de meest algemene afleidbare garantie)
(P.2)	$A'_2 \subseteq A'_1 \Rightarrow B'_1 \subseteq B'_2$	(monotoniteit)
(P.3)	$A' = A \Rightarrow B' = B$	(behoud van modus ponens)

Tabel 5.6: Voorwaarden voor benaderend redeneren uit een positieve vaagregel “ALS X is A DAN Y is B ” en de waarneming “ X is A' ” (A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$).

$$(N.4)=(P.4) \quad A' \subseteq A \Rightarrow B' = B$$

wat nog eens verduidelijkt dat wat men dient na te gaan de *vervulling* van het antecedent door de waarneming is. Similariteitsgebaseerd redeneren is in die zin zowel onintuïtief als schadelijk: onintuïtief, omdat we een waarneming A' toetsen aan een referentiegeval A , en niet andersom; schadelijk, omdat de symmetrie van de similariteitsmaat onvermijdelijk botst met (N.4) en (P.4) en het inferentieproces op die manier keldert, zoals we in de Sectie 5.2.2 hebben gezien.

Op grond van deze overwegingen definiëren we *inclusiegebaseerd redeneren* voor de regel “ALS X is A DAN Y is B ” (A in $\mathcal{F}(U)$, B in $\mathcal{F}(V)$) met een inclusiemaat INC over U en een modificatie-afbeelding f als de U - V inferentiemethode $\mathcal{C}_{INC,f}^{A,B}$ die A' omzet in

$$\mathcal{C}_{INC,f}^{A,B}(A') = f(INC(A', A), B)$$

Hiermee is uiteraard nog niks gezegd over de vervulling van (N.1) t.e.m. (N.3) of (P.1) t.e.m. (P.3). Volgende stellingen geven aan dat mits bijzondere keuzes voor INC en f een aantrekkelijk verband met de methodes uit Sectie 5.1.4 kan worden bekomen.

5.33 Stelling. Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$ zo dat, voor v in V ,

$$B'(v) = \sup_{u \in U} T(A'(u), I_T(A(u), B(v)))$$

dan geldt

$$INC_{I_T}(B', B) \geq INC_{I_T}(A', A) \quad (5.43)$$

Bewijs. We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
INC_{I_T}(B', B) &= \inf_{v \in V} I_T(B'(v), B(v)) \\
&= \inf_{v \in V} I_T\left(\sup_{u \in U} T(A'(u), I_T(A(u), B(v))), B(v)\right) \\
&= \inf_{v \in V} \inf_{u \in U} I_T(T(A'(u), I_T(A(u), B(v))), B(v)) \\
&= \inf_{v \in V} \inf_{u \in U} I_T(A'(u), I_T(I_T(A(u), B(v)), B(v))) \\
&\geq \inf_{u \in U} I_T(A'(u), A(u)) \\
&= INC_{I_T}(A', A)
\end{aligned}$$

waarbij o.m. gebruik gemaakt werd van eigenschappen 4 en 5 uit Stelling 2.29. $\square$

5.34 Gevolg. Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$, zo dat, voor v in V ,

$$B'(v) = \sup_{u \in U} T(A'(u), I_T(A(u), B(v)))$$

dan geldt

$$B' \subseteq \mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A, B}(A') \quad (5.44)$$

Bewijs. Noem $\alpha = INC_{I_T}(A', A)$. Wegens Stelling 5.33 is $INC_{I_T}(B, B') \geq \alpha$, waaruit met de residueringsvoorwaarde (2.1) volgt, voor v in V ,

$$\begin{aligned}
I_T(B'(v), B(v)) \geq \alpha &\iff T(B'(v), \alpha) \leq B(v) \\
&\iff I_T(\alpha, B(v)) \geq B'(v)
\end{aligned}$$

$\square$

5.35 Stelling. Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$ zo dat, voor v in V ,

$$B'(v) = \inf_{u \in U} I_T(A'(u), T(A(u), B(v)))$$

dan geldt

$$INC_{I_T}(B, B') \geq INC_{I_T}(A', A)$$

Bewijs. We vinden achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
INC_{I_T}(B, B') &= \inf_{v \in V} I_T(B(v), B'(v)) \\
&= \inf_{v \in V} I_T \left(B(v), \inf_{u \in U} I_T(A'(u), T(A(u), B(v))) \right) \\
&= \inf_{v \in V} \inf_{u \in U} I_T(B(v), I_T(A'(u), T(A(u), B(v)))) \\
&\geq \inf_{v \in V} \inf_{u \in U} I_T(B(v), T(I_T(A'(u), A(u)), B(v))) \\
&\geq \inf_{v \in V} \inf_{u \in U} T(I_T(B(v), B(v)), I_T(A'(u), A(u))) \\
&= \inf_{u \in U} I_T(A'(u), A(u)) \\
&= INC_{I_T}(A', A)
\end{aligned}$$

waarbij o.m. gebruik gemaakt werd van eigenschappen 2 en 5 uit Stelling 2.29. $\square$

5.36 Gevolg. Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A' in $\mathcal{F}(U)$, B, B' in $\mathcal{F}(V)$, zo dat, voor v in V ,

$$B'(v) = \inf_{u \in U} I_T(A'(u), T(A(u), B(v)))$$

dan geldt

$$B' \supseteq \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A')$$

Bewijs. Noem $\alpha = INC_{I_T}(A', A)$. Wegens Stelling 5.35 is $INC_{I_T}(B', B) \geq \alpha$, waaruit met de residueringsvoorwaarde (2.1) volgt, voor elke v in V ,

$$\begin{aligned}
I_T(B(v), B'(v)) \geq \alpha &\iff T(B(v), \alpha) \leq B'(v) \\
&\iff T(\alpha, B(v)) \leq B'(v)
\end{aligned}$$

$\square$

Bovenstaande stellingen geven dus aan hoe men er voor kan zorgen dat inclusiegebaseerd redeneren een *conservatieve benadering* oplevert voor de inferentieresultaten bekomen met de methodes uit Sectie 5.1.4, d.w.z. zo dat de bekomen restricties (resp. garanties) niet specifiek (resp. algemener) zijn dan hetgeen met die methodes afleidbaar is. Hieruit, en uit de eigenschappen van de inclusiemaat INC_{I_T} , leidt men gemakkelijk af dat de methodes ook aan de voorwaarden uit Tabel 5.5 en 5.6 voldoen, zodat $\mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A, B}$ en $\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}$ kunnen gebruikt worden voor het redeneren met negatieve en positieve regels respectievelijk. Vermelden we ook dat een aantal eigenschappen van $\mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A, B}$ reeds bestudeerd werden in [15], maar dat bij ons weten niemand eerder de link met het redeneren door analogie en met positieve en negatieve regels heeft gelegd.

Volgende stellingen bewijzen tot slot de extensionaliteit van beide methodes.

5.37 Stelling. [15] Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$, B in $\mathcal{F}(V)$, dan is

$$SIM_T \left(\mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A, B}(A'_1), \mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A, B}(A'_2) \right) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$$

5.38 Stelling. Zij T een links-continue t-norm op $[0, 1]$, A, A'_1, A'_2 in $\mathcal{F}(U)$, B in $\mathcal{F}(V)$, dan is

$$SIM_T \left(\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_1), \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_2) \right) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$$

Bewijs. Voor willekeurige v in V geldt

$$\begin{aligned} & I_T \left(\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_1)(v), \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_2)(v) \right) \\ &= I_T \left(T \left(\inf_{u \in U} I_T(A'_1(u), A(u)), B(v) \right), T \left(\inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), A(u)), B(v) \right) \right) \\ &\geq I_T \left(\inf_{u \in U} I_T(A'_1(u), A(u)), \inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), A(u)) \right) \\ &\geq \inf_{u \in U} I_T(I_T(A'_1(u), A(u)), I_T(A'_2(u), A(u))) \\ &\geq \inf_{u \in U} I_T(A'_2(u), A'_1(u)) \\ &\geq \inf_{u \in U} E_T(A'_1(u), A'_2(u)) \end{aligned}$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van eigenschappen 7 en 8 uit Stelling 2.29. Analooog geldt ook $I_T \left(\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_2)(v), \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_1)(v) \right) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$, zodat we kunnen besluiten dat $SIM_T \left(\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_1), \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A, B}(A'_2) \right) \geq SIM_T(A'_1, A'_2)$. □

5.39 Voorbeeld. Men kan er zich van vergewissen dat de beschreven inclusiegebaseerde methodes de problemen die we bij de methode van Türkşen en Zhang hebben gesignaleerd oplossen. Immers, zowel de invoer uit Figuur 5.12a) als de scherpe waarde 1008hPa zijn deelverzamelingen van *laag*, zodat het bekomen inferentieresultaat, zowel in de positieve als de negatieve benadering van de vaagregel, gelijk is aan het consequent *reëel*, voor gelijk welke keuze van een links-continue t-norm T .

Inclusiegebaseerd Redeneren met Meerdere Vaagregels

Onderstel dat een regelverzameling K gegeven is zoals in Voorbeeld 5.32. Interpreteert men de elementen in K als negatieve regels, dan is (gelet op het feit

dat we de uitvoer van de individuele regels als negatieve informatie beschouwen) het aangewezen om het inferentieresultaat te berekenen als

$$\mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^K = \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_{INC_{I_T}, I_T}^{A_i, B_i}(A') \quad (5.45)$$

met T een links-continue t -norm. Analoog stellen we voor dat in het geval van positieve regels de conclusie volgende vorm aanneemt:

$$\mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^K = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_{INC_{I_T}, T}^{A_i, B_i}(A') \quad (5.46)$$

Deze manier van aggregeren heeft de volgende voordelen:

1. Extensionaliteit van beide methodes is gegarandeerd wegens Stellingen 5.26, 5.37 en 5.38.
2. De modus ponens blijft behouden onder de voorwaarde dat voor $i \neq j$, $\text{supp}(A_i)$ en $\text{ker}(A_j)$ disjunct zijn.
3. Het resultaat van inferentie met zowel positieve als negatieve vaagregels vormt een IWV zodra de met de regels en de gebruikte connectieven corresponderende vaagrelaties aanleiding geven tot onderling consistente regelverzamelingen.

Samengevat stelt inclusiegebaseerd redeneren ons in staat om, op een logische en efficiënte manier, redeneringen met imprecieze informatie te maken.

- Logisch, want de voorgestelde methodes respecteren de belangrijkste criteria die we aan positieve en negatieve regels opleggen; in feite scheiden we het aspect van het nagaan van de vervulling van antecedent door waarneming van het modifieren van het consequent tot de conclusie, twee stappen die in de methodes uit Sectie 5.1.4 simultaan gebeuren.
- Efficiënt, daar de methode haar complexiteit overerft van het algoritme voor similariteitsgebaseerd redeneren. We betalen anderzijds ook een zekere prijs voor de benadering die we hebben gemaakt, waarvan de oorzaak moet gezocht worden bij het (onvermijdelijke) FITA-aggregatiemechanisme: daar de regels in isolatie worden toegepast op de invoer kan, net zoals voor de FITA-methodes uit Sectie 5.1.4, voor imprecieze invoerwaarden niet steeds de meest informatieve conclusie worden afgeleid.

Hoofdstuk 6

Ontginning van Vaagassociatieregels

Ce qu'on a obtenu n'est jamais qu'un nouveau
point de départ pour désirer davantage.
(Marcel Proust)

Om de kloof te dichten tussen de abstracte wiskundige modellen voor de voorstelling en de verwerking van imprecisie, en de allesbehalve ideale werkelijkheid die wij ermee hopen te temmen, werden verschillende “zachte” technieken voor de inductie van informatie uit data uitgedokterd. Zo maakten we in Hoofdstuk 2 en 4 reeds uitgebreid kennis met de manier waarop onder- en bovenbenaderingen in de (veralgemeende vaag)ruwverzamelingenleer aanleiding geven tot granulaire karakterisaties van concepten.

Met het oog op benaderend redeneren is vooral de toelevering van betrouwbare en significante vaagregels belangrijk. Om die reden willen we in dit laatste hoofdstuk beknopt de aandacht vestigen op het ontginnen van vaagassociatieregels in grote datavolumes, een techniek die momenteel ruime verspreiding kent omwille van haar transparantie, efficiëntie en algemeenheid¹.

We onderwerpen het formalisme aan een inhoudelijk en formeel onderzoek, waarbij we i.h.b. de problematiek omtrent de keuze van geschikte kwaliteitsmaten voor vaagassociatieregels trachten in te bedden in de stroom van het gedachtengoed uit de voorgaande hoofdstukken; in het indelen van gegevens uit datatabellen in positieve records die een gegeven associatie (tussen attributen) min of meer bevestigen en negatieve records die de associatie min of meer tegenspreken, herkent de lezer wellicht een laatste tersluiks knipoogje naar ons uitgangsgegeven van tweezijdigheid.

¹en die om die reden hier de voorkeur geniet boven soortgelijke methodes geïnspireerd op de ruwverzamelingenleer, waartoe de invoering van een uitgebreider wiskundig apparaat is vereist.

6.1 Herkomst en Motivatie

Associatieregels, ingevoerd in 1993 door Agrawal, Imielinski en Swami [1], stellen zich tot doel om op compacte en doeltreffende wijze bepaalde afhankelijkheden tussen attributen in een datatabel te achterhalen en voor te stellen. Oorspronkelijk werden ze vooral ontwikkeld met het oog op marketingdoeleinden: uit informatie omtrent het frequent samen voorkomen van bepaalde producten op het boodschappenlijstje van hun klanten, kunnen winkeliers afleiden hoe ze hun koopwaar het best kunnen etaleren en/of in advertenties aanprijzen om een maximaal verkoopseffect te bereiken. Het spreekt voor zich dat het bepalen van dergelijke *associaties* tussen frequent voorkomende (collecties van) items ook buiten de commerciële wereld gretig aftrek vindt; gelet op de vaak massieve data-archieven waarmee we worden geconfronteerd, hebben we meer dan ooit nood aan beknopte, begrijpbare samenvattingen van de relevante aspecten van gegevens.

Mede door hun ontstaan in het wereldje van verkoopstransacties gebeurt de ontginning van associatieregels traditioneel in een (niet-ledige) datatabel D met binaire attributen $A, B, \dots$. Conceptueel stelt een record d in D een verkoopstransactie voor, waarbij elk van de attributen overeenstemt met artikelen die al of niet gekocht werden in de transactie. Voor elk attribuut A is $A(d)$, de waarde van d voor A , derhalve 1 of 0 afhankelijk of artikel A in transactie d wel of niet werd gekocht. We kunnen A daarom ook opvatten als de verzameling van transacties die het betreffende artikel bevatten, i.e. $A(d) = 1$ indien record d A bevat en $A(d) = 0$ indien record d A niet bevat. Onder een *associatieregel* verstaat men dan elke uitdrukking van de vorm $A \Rightarrow B$, zoals bijvoorbeeld *mobieltje* $\Rightarrow$ *telefoonkaart*, met als betekenis dat wanneer artikel A wordt gekocht in een transactie, hetzelfde allicht geldt voor B .

6.1 Opmerking. Bij uitbreiding beschouwt men vaak ook associaties tussen verzamelingen van attributen, zoals in $\{\text{mobieltje}\} \Rightarrow \{\text{telefoonkaart}, \text{batterijen}\}$; in dit proefschrift laten we dergelijke patronen achterwege, gelet op het feit dat ze de notatie verzwaren zonder een wezenlijke bijdrage te leveren tot de kern van de uiteenzetting.

Soms toont men ook interesse voor negatieve associaties van de vorm $A \Rightarrow coB$, waarvan de beoogde betekenis is dat “transacties” die A bevatten, B allicht niet bevatten, zoals bijvoorbeeld in “*geluk in de liefde*” $\Rightarrow co$ “*geluk in het spel*”. We noemen $A \Rightarrow coB$ ook de *gecomplementeerde regel* van $A \Rightarrow B$.

Associatieregels kunnen met elkaar worden vergeleken op grond van diverse *kwaliteitsmaten*, waarvan de meeste statistisch van aard zijn. Een uitgebreid gamma aan alternatieven wordt bestudeerd in [121]. Typisch gaat de aandacht uit naar *ondersteuning* of *supp* (support²) en *betrouwbaarheid* of *conf* (confi-

²Niet te verwarren met de drager $supp(A)$ van de vaagverzameling A !

ID	leeftijd (L)	inkomen (I) (x1000€)	aankoopbedrag (A) (€)
d_1	39	17	80
d_2	27	22	400
d_3	65	41	2100
d_4	44	24	330
d_5	46	64	1750

Tabel 6.1: Een eenvoudige datatabel met kwantitatieve attributen.

dence), die worden gedefinieerd als,

$$supp(A \Rightarrow B) = \frac{|A \cap B|}{|D|} \quad (6.1)$$

$$conf(A \Rightarrow B) = \frac{|A \cap B|}{|A|} \quad (6.2)$$

waarbij formule (6.2) pas wordt berekend wanneer (6.1) een bepaalde strict positieve drempelwaarde overschrijdt, zodat $|A| \neq 0$. In het kader van de waarschijnlijkheidsleer stelt $supp(A \Rightarrow B)$ de probabilliteit voor van het gezamenlijk optreden van A en B in een record d in D , en meet derhalve de *relevantie* van de regel, terwijl $conf(A \Rightarrow B)$ de voorwaardelijke kans geeft dat B optreedt gegeven het optreden van A in d —de betrouwbaarheid van $A \Rightarrow B$.

Het probleem van het ontginnen van *geldige associatieregels* kan formeel worden omschreven als het genereren uit D van alle associatieregels $A \Rightarrow B$ die voldoen aan

$$\begin{aligned} supp(A \Rightarrow B) &\geq minsupp \\ conf(A \Rightarrow B) &\geq minconf \end{aligned}$$

waarbij $minsupp$ en $minconf$ twee vooraf op te geven drempelwaarden in $[0,1]$ voorstellen.

De onderstelling dat datatabellen enkele binaire attribuutwaarden kunnen bevatten oogt erg restrictief. Niettemin is het conceptueel steeds mogelijk om kwantitatieve attributen, zoals *leeftijd* en *verkoopprijs*, die waarden aannemen in een deelverzameling van $\mathbb{R}$, om te vormen tot binaire.

6.2 Voorbeeld. Tabel 6.1 toont voor een aantal personen gegevens over hun leeftijd, jaarlijks inkomen en het bedrag dat ze in een bepaalde winkel hebben besteed. Het idee is nu om elk van de kwantitatieve attributen te vervangen door een aantal nieuwe, die samen een partitie vormen van de waardenverzameling van het originele attribuut. Bijvoorbeeld, *leeftijd* wordt vervangen door de drie intervallen $[0, 30[$, $[30, 60[$ en $[60, 100]$. De nieuwe attributen zijn binair: ze nemen de waarde 1 aan indien de oorspronkelijke attribuutwaarde behoort tot het interval dat ze beschrijven. Dit wordt geïllustreerd in Tabel 6.2.

Op de getransformeerde datatabel zijn de ontginningsprocedures voor het binaire geval van kracht; de gegenereerde associatieregels noemt men *kwantita-*

ID	L in $[0,30[$	L in $[30,60[$	L in $[60,100]$	I in $[0,20[$	I in $[20,40[$
d_1	0	1	0	1	0
d_2	1	0	0	0	1
d_3	0	0	1	0	0
d_4	0	1	0	0	1
d_5	0	1	0	0	0

ID	I in $[40,80]$	A in $[0,100[$	A in $[100,1000[$	A in $[1000,5000]$
d_1	0	1	0	0
d_2	0	0	1	0
d_3	1	0	0	1
d_4	0	0	1	0
d_5	1	0	0	1

Tabel 6.2: Binaire transformatie van de data uit Tabel 6.1.

tieve associatieregels. [119]. Indien bv. $minsupp = 0.3$ en $minconf = 0.6$, dan kan men volgende geldige associatieregels uit deze data ontginnen:

Regel	supp	conf
I in $[20, 40[\Rightarrow A$ in $[100, 1000[$	0.4	1
A in $[100, 1000[\Rightarrow I$ in $[20, 40[$	0.4	1
I in $[40, 80[\Rightarrow A$ in $[1000, 5000]$	0.4	1
A in $[1000, 5000] \Rightarrow I$ in $[40, 80[$	0.4	1

De opdeling van attribuutwaarden volgens een scherpe partitie wordt echter gekenmerkt door abrupte overgangen rond de intervalgrenzen. [78] Zo houden regels zoals “klanten tussen 30 en 60 jaar oud doen meestal aankopen tussen 1000 en 5000€” bv. geen rekening met een klant van 29 die een aankoop van 3000€ deed. Het lijkt daarom zinvoller om waarden toe te laten uit het volledige eenheidsinterval (i.p.v. enkel uit $\{0, 1\}$), zo dat records een gegeven attribuut kunnen bezitten in een bepaalde mate. Met dit uitgebreid scenario corresponderen dan meer natuurlijke *vaagassociatieregels* zoals “klanten van middelbare leeftijd doen meestal grote aankopen”, en waarvoor aangepaste kwaliteitsmaten bestaan (zie volgende sectie).

6.3 Voorbeeld. We vervangen de negen intervallen uit Tabel 6.2 door negen corresponderende vaagverzamelingen (om de uiteenzetting beknopt te houden, expliciteren we de lidmaatschapsfuncties hier niet); voor elk van de transacties wordt de mate waarin ze voldoen aan de nieuwbakken attributen weergegeven in Tabel 6.3.

6.2 Positieve en Negatieve Voorbeelden

In Sectie 5.1.3 werd de semantiek van een (vaag)regel uiteengezet a.d.h.v. positieve voorbeelden die de regel bevestigen en negatieve die de regel ontkrachten.

ID	L=jong	L=middelbaar	L=oud	I=bescheiden	I=gemiddeld
d_1	0.3	0.7	0	0.8	0.2
d_2	0.8	0.2	0	0.5	0.5
d_3	0	0.4	1	0	0.5
d_4	0	0.9	0.1	0.4	0.6
d_5	0	0.8	0.2	0	0.2

ID	I=royaal	A=laag	A=gemiddeld	A=hoog
d_1	0	0.9	0.1	0
d_2	0	0.2	0.8	0
d_3	0.5	0	0	1
d_4	0	0.3	0.7	0
d_5	0.8	0	0.1	0.9

Tabel 6.3: Vervaging van de data uit Tabel 6.1.

Zoals we zullen aantonen, leidt in het licht van de constructie en interpretatie van kwaliteitsmaten voor vaagassociatieregels dit gedachtengoed tot interessante nieuwe inzichten.

6.2.1 Scherpe Associatieregels

Voor een goed begrip hebben we in Tabel 6.4 de betekenis van individuele transacties uit de datatabel als een positief, negatief, niet-positief of niet-negatief voorbeeld van een aantal verwante associatieregels samengevat. Het valt meteen op dat de positieve voorbeelden van $A \Rightarrow B$, gegeven door $A \cap B$, samenvallen met die van $B \Rightarrow A$, als gevolg waarvan $\text{supp}(A \Rightarrow B) = \text{supp}(B \Rightarrow A)$. Inderdaad is ondersteuning, gegeven als de relatieve fractie van positieve voorbeelden in de datatabel, een symmetrische maat, die derhalve slechts een deel van het plaatje oplevert.

In tegenstelling tot positieve voorbeelden is een negatief voorbeeld van $A \Rightarrow B$ geen negatief voorbeeld van $B \Rightarrow A$, en vice versa. Evenmin hoeft het complement van de verzameling der positieve voorbeelden samen te vallen met die van negatieve voorbeelden, net zoals een “niet-negatief voorbeeld” verschilt van een “positief voorbeeld”. Anderzijds is een positief voorbeeld van $A \Rightarrow coB$ een negatief voorbeeld van $A \Rightarrow B$, en vice versa.

Merk op dat

$$\text{conf}(A \Rightarrow B) = \frac{\text{supp}(A \Rightarrow B)}{\text{supp}(A \Rightarrow B) + \text{supp}(A \Rightarrow coB)} \quad (6.3)$$

wat een ontleding van betrouwbaarheid in termen van positieve voorbeelden m.b.t. een regel en diens gecomplementeerde naar voor schuift. Hüllermeier [80] definieerde een alternatieve betrouwbaarheidsmaat die de verhouding bepaalt van de ondersteuning voor de regel $A \Rightarrow B$ en diens gecomplementeerde $A \Rightarrow$

d	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow coB$
positief voorbeeld	$d \in A \wedge d \in B$	$d \in A \wedge d \in B$	$d \in A \wedge d \notin B$
niet-positief voorbeeld	$d \notin A \vee d \notin B$	$d \notin A \vee x \notin B$	$d \notin A \vee d \in B$
negatief voorbeeld	$d \in A \wedge d \notin B$	$d \notin A \wedge d \in B$	$d \in A \wedge d \in B$
niet-negatief voorbeeld	$d \notin A \vee d \in B$	$d \in A \vee d \notin B$	$d \notin A \vee d \notin B$

Tabel 6.4: De aard van record d m.b.t. regels $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ en $A \Rightarrow coB$.

coB :

$$conf_n(A \Rightarrow B) = \frac{supp(A \Rightarrow B)}{supp(A \Rightarrow coB)} \quad (6.4)$$

In [80] werd opgemerkt dat (6.2) en (6.4) equivalent zijn in de zin dat, voor Δ in $[0, 1]$,

$$conf(A \Rightarrow B) \geq \Delta \iff conf_n(A \Rightarrow B) \geq \frac{\Delta}{1 - \Delta} \quad (6.5)$$

In tegenstelling tot (6.1), (6.2), en (6.3), die waarden aannemen in $[0, 1]$, kan de waarde van (6.4) echter elk positief reëel getal zijn. Dit maakt de keuze van een zinvolle drempelwaarde $minconf$ een stuk moeilijker. Bovendien moet het ontginningsalgoritme over een ingebouwde test beschikken om na te gaan of voldaan is aan $supp(A \Rightarrow coB) = 0$, wat overeenstemt met oneindig vertrouwen in een regel, of m.a.w. met het ontbreken van negatieve voorbeelden.

6.4 Opmerking. In een verwante aanpak maken Dubois et al. [55] onderscheid tussen positieve, negatieve en irrelevante voorbeelden van een regel, die ze groeperen in verzamelingen S_+ , S_- en $S_\pm$ respectievelijk. De laatste verzameling definiëren ze als

$$S_\pm = \{d \mid d \in D \text{ en } d \notin A\}$$

Men kan gemakkelijk nagaan dat onze klassen van niet-positieve en niet-negatieve voorbeelden kunnen worden bekomen door vereniging van $S_\pm$ met de verzameling van positieve en negatieve voorbeelden respectievelijk, hetzij

$$\begin{aligned} d \text{ is een niet-positief voorbeeld} &\iff d \in S_- \cup S_\pm \\ d \text{ is een niet-negatief voorbeeld} &\iff d \in S_+ \cup S_\pm \end{aligned}$$

Onze “opdeling” van transacties in vier niet-disjuncte klassen is vooral interessant omdat elke klasse aanleiding geeft tot de definitie van een geassocieerde kwaliteitsmaat.

6.5 Definitie. De kwaliteitsmaten M_1 , M_2 , M_3 en M_4 van de associatieregels

$A \Rightarrow B$ worden gegeven als

$$M_1(A \Rightarrow B) = \frac{|A \cap B|}{|D|} \quad (6.6)$$

$$M_2(A \Rightarrow B) = \frac{|coA \cup coB|}{|D|} \quad (6.7)$$

$$M_3(A \Rightarrow B) = \frac{|A \cap coB|}{|D|} \quad (6.8)$$

$$M_4(A \Rightarrow B) = \frac{|coA \cup B|}{|D|} \quad (6.9)$$

M_1, M_2, M_3 en M_4 werden in [48], in het licht van het onderscheid tussen positieve en negatieve voorbeelden, *minimale ondersteuning* (minimal support), *maximale oppositie* (maximal opposition), *minimale oppositie* (minimal opposition) en *maximale ondersteuning* (maximal support) genoemd. Men gaat eenvoudig de volgende verbanden na.

6.6 Stelling.

$$\begin{aligned} M_1(A \Rightarrow B) &\leq M_4(A \Rightarrow B) \\ M_3(A \Rightarrow B) &\leq M_2(A \Rightarrow B) \end{aligned}$$

6.7 Stelling.

$$\begin{aligned} M_2(A \Rightarrow B) &= 1 - M_1(A \Rightarrow B) \\ M_3(A \Rightarrow B) &= 1 - M_4(A \Rightarrow B) \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat slechts twee maten onafhankelijk zijn. We kunnen daarom bv. volstaan met M_1 en M_4 ; M_1 valt uiteraard samen met *supp*, i.e. de fractie van positieve voorbeelden, terwijl M_4 een niet-symmetrische maat, verschillend van *conf*, bepaalt die alle transacties die de regel niet schenden telt, i.e. het relatief aantal niet-negatieve voorbeelden. De verbanden tussen de nieuwe maten kunnen ook worden uitgedrukt in termen van een regel en diens gecomplementeerde.

6.8 Stelling.

$$M_3(A \Rightarrow coB) = M_1(A \Rightarrow B) \quad (6.10)$$

$$M_2(A \Rightarrow coB) = M_4(A \Rightarrow B) \quad (6.11)$$

Merk tenslotte op dat $conf_n$ uitgedrukt kan worden in termen van de maten ingevoerd in Definitie 6.5:

$$conf_n(A \Rightarrow B) = \frac{M_1(A \Rightarrow B)}{M_3(A \Rightarrow B)}$$

6.2.2 Vaagassociatieregels

Wanneer we toelaten dat de datatabel D waarden aanneemt in $[0,1]$ zoals in Voorbeeld 6.3, en dus elk van de attributen correspondeert met een vaagverzameling in D , kunnen we Definitie 6.5 als volgt uitbreiden.

6.9 Definitie. Zij T een t -norm, S een t -conorm en N een negator op $[0,1]$. De kwaliteitsmaten M_1, M_2, M_3 en M_4 voor de vaagassociatieregels $A \Rightarrow B$ worden gegeven als

$$M_1(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d) \quad (6.13)$$

$$M_2(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (co_N A \cup_S co_N B)(d) \quad (6.14)$$

$$M_3(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (A \cap_T co_N B)(d) \quad (6.15)$$

$$M_4(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (co_N A \cup_S B)(d) \quad (6.16)$$

6.10 Opmerking. In de literatuur treft men M_1 ook aan onder de naam *supp* (zie bv. [80]), naar analogie met het scherpe geval; we zullen in dit proefschrift beide benamingen naar goeddunken door elkaar gebruiken.

Aangezien

$$T(A(d), B(d)) \leq B(d) \leq S(N(A(d)), B(d))$$

en

$$T(A(d), N(B(d))) \leq N(B(d)) \leq S(N(A(d)), N(B(d)))$$

voor elke d in D , blijft Stelling 6.6 geldig wanneer de kwaliteitsmaten gedefinieerd worden door (6.13) t.e.m. (6.15). Wanneer $N = N_s$ en (T, S, N_s) een de Morgan triplet is, blijft het verband tussen ondersteunings- en oppositiematen vervat in Stelling 6.7 geldig.

Om de gecomplementeerde vaagassociatieregels van $A \Rightarrow B$ te bepalen kan men in principe beroep doen op gelijk welke negator voor de definitie van het complement. Voor de eenvoud kiezen we voor de standaardnegator N_s , en houden we de notatie $A \Rightarrow coB$ aan. Het is duidelijk dat de gelijkheden (6.10) en (6.11) op die manier behouden blijven indien $N = N_s$ in (6.13) t.e.m. (6.16).

De uitbreidingen van de betrouwbaarheidsmaten nemen de volgende vorm aan:

$$\begin{aligned}
conf(A \Rightarrow B) &= \frac{\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d)}{\sum_{d \in D} A(d)} \\
conf_2(A \Rightarrow B) &= \frac{\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d)}{\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d) + \sum_{d \in D} (A \cap_T co_N B)(d)} \\
conf_n(A \Rightarrow B) &= \frac{\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d)}{\sum_{d \in D} (A \cap_T co B)(d)}
\end{aligned}$$

Merk op dat de gelijkheid tussen $conf$ en $conf_2$ (cfr. formule (6.3)) niet noodzakelijk voldaan is in het vage geval, aangezien

$$\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d) + \sum_{d \in D} (A \cap_T co_N B)(d) = \sum_{d \in D} A(d) \quad (6.17)$$

niet altijd geldig is. Ten gevolge hiervan is ook het verband in (6.5) niet langer gegarandeerd. Langs de andere kant werd bewezen in [2], dat als $N = N_s$, dan (6.17) geldt als en slechts $T = T_P$. Meer algemeen geldt het volgende verband tussen $conf$ en $conf_2$:

6.11 Stelling. Als $conf$ en $conf_2$ worden gedefinieerd a.d.h.v. N_s en een t-norm T zo dat, voor alle x, y in $[0, 1]$,

- $T(x, y) \leq T_P(x, y)$, dan is $conf(A \Rightarrow B) \leq conf_2(A \Rightarrow B)$
- $T(x, y) \geq T_P(x, y)$, dan is $conf(A \Rightarrow B) \geq conf_2(A \Rightarrow B)$

Bewijs. Onmiddellijk uit (6.17), Alsina's resultaat en het stijgend-zijn van een t-norm. □

6.12 Opmerking. In [55] benadrukken de auteurs dat de keuze van het product voor de t-norm T ook noodzakelijk is indien men wil garanderen dat de som der respectieve graden waarin een bepaalde record d een positief voorbeeld (i.e. $T(A(x), B(x))$), een negatief voorbeeld (i.e. $T(A(x), N_s(B(x)))$) en een irrelevant voorbeeld (i.e. $N_s(A(x))$) is, gelijk zou zijn aan 1. Het feit dat men op die manier de uitgelezen rijkdom aan beschikbare t-normen te niet doet, lijkt niettemin een wel erg hoge prijs om te betalen voor deze eigenschap, die zich voordoet als een analogon van de wet van het uitgesloten derde (zie ook Sectie 2.1.2) uit de klassieke verzamelingenleer.

6.3 Semantiek van Kwaliteitsmaten

Als we even voorbijgaan aan de bijzondere varianten van de “klassieke” betrouwbaarheidsmaat (namelijk $conf_2$ en $conf_n$) beschikken we, om de kwaliteit

van vaagassociatieregels te testen, naast *conf* over de “onafhankelijke” maten $M_1 = \text{supp}$ en M_4 uit Definitie 6.9. Merk terloops op dat

$$\begin{aligned} \text{conf}(A \Rightarrow B) &= \frac{\sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d)}{\sum_{d \in D} A(d)} = \text{INC}_T(A, B) \\ M_4(A \Rightarrow B) &= \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (\text{co}_N A \cup_S B)(d) = \text{INC}_{S,N}(A, B) \end{aligned}$$

waarbij we $\text{INC}_T(A, B)$ en $\text{INC}_{S,N}(A, B)$ reeds kennen als de formules (3.18) en (3.21) uit Sectie 3.2.2; vermits het beide (verzamelinggebaseerde) *inclusie-maten* zijn, kan men vermoeden dat hun semantiek als kwaliteitsmaat voor (vaag)associatieregels nauw met elkaar is verbonden (cfr. ook Opmerking 3.37). Vooraleer we ons aan een nauwgezette analyse van deze kwestie wagen in Sectie 6.3.2, bekijken we eerst beknopt enkele aspecten omtrent ondersteuningsmaten.

6.3.1 Ondersteuningsmaten

Hoewel in essentie aan de maat M_1 het onderliggende idee van het tellen van het aantal positieve voorbeelden ten grondslag ligt, speelt de keuze van de t -norm een beslissende rol bij de implementatie ervan in een reëel systeem. Zo vindt men in Tabel 6.5 voor een aantal concrete records de bijdrage tot de ondersteuningsmaat, gemodelleerd a.d.h.v. van de gekende t -normen T_M , T_P en T_W terug. Het feit dat, voor alle x, y in $[0, 1]$,

$$T_M(x, y) \geq T_P(x, y) \geq T_W(x, y)$$

verklaart uiteraard de ordening van de waarden, maar er zit meer achter. Het niet-compenserend karakter van de t -norm T_M , reeds aangehaald in Sectie 2.1.2, heeft voor gevolg dat records die slechts in een geringe mate een positief voorbeeld van $A \Rightarrow B$, toch enige mate van ondersteuning opleveren (lijn 1). De Lukasiewicz t -norm T_W daarentegen eist een significante bijdrage van de constituenten van de regel, getuige lijn 2. Wat ook opvalt is dat voor grote waarden van $A(d)$ en $B(d)$ (records die in hoge mate een positief voorbeeld zijn), het relatief verschil tussen de verschillende t -normen nivelleert (lijn 3 en 4). Het cumulatief effect van deze verschillen veroorzaakt in de sommatie uit formule (6.13) laat zich ook voelen in de regels die worden gedetecteerd.

6.13 Voorbeeld. We hernemen de gegevens uit Voorbeeld 6.3, waarbij we ons focussen op de regels “Als de klant van middelbare leeftijd is, dan is zijn inkomen gemiddeld” en “Wie een royaal inkomen heeft, spendeert hoge bedragen”. Men kan zich uit Tabel 6.3 vergewissen dat voor de eerste regel er een heleboel “lauwe voorstanders” zijn, d.w.z. records die beide componenten in zekere, maar niet echt overtuigende, mate bezitten. Voor de tweede regel is de polarisatie een stuk groter: twee records leveren substantiële bijdragen, terwijl de anderen zich volstrekt afzijdig houden.

$A(d)$	$B(d)$	T_M	T_P	T_W
0.1	0.2	0.1	0.02	0
0.5	0.5	0.5	0.25	0
0.6	0.8	0.6	0.48	0.4
0.9	0.9	0.9	0.81	0.8

Tabel 6.5: Vergelijking van de bijdrage van enkele records tot $M_1(A \Rightarrow B)$.

Gelet op de gevoerde discussie, weerspiegelt dit verschil zich ook in de mate waarin de verschillende varianten (i.e. gebaseerd op verschillende t-normen) van M_1 steun verlenen aan beide transacties:

	Regel	T_M	T_P	T_W
L is middelbaar	$\Rightarrow I$ is gemiddeld	0.32	0.228	0.1
I is royaal	$\Rightarrow A$ is hoog	0.26	0.244	0.24

Voor $T = T_M$ blijkt de eerste regel, zelfs globaal over *alle* regels die kunnen gevormd worden genomen, de meest significante, terwijl T_W de regel onverhopen negeert, indien we veronderstellen dat de drempelwaarde *minsupp* werd vastgesteld als 0.2. T_P neemt tussen deze twee uitersten een compromiskeuze in.

6.3.2 Betrouwbaarheidsmaten

Gelet op het feit dat het beide inclusiematrizen zijn, werpen *conf* en M_4 zich op als alternatieven voor het meten van de betrouwbaarheid van (vaag)associatieregels. Dit lijkt ook te zijn opgemerkt door Chen et al. [25], die de *mate van implicatie* (degree of implication) $D_{imp}(A \Rightarrow B)$, gegeven door, voor een implicator I ,

$$D_{imp}(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} I(A(d), B(d)) \quad (6.18)$$

invoerden ter vervanging van de klassieke betrouwbaarheidsmaat *conf*. De vraag stelt zich of we de S-implicator in M_4 ongestraft kunnen vervangen door bv. een residuele implicator, zoals door (6.18) wordt gesuggereerd.

Tabel 6.6 toont daartoe de verschillende bijdragen van diverse records tot $M_4(A \Rightarrow B)$ voor enkele bekende implicatoren. In de meeste gevallen gedragen de S-implicatoren (links) en de R-implicatoren (rechts) zich gelijkaardig. De tweede lijn brengt echter een opvallend verschil aan het licht; de oorzaak ervoor ligt bij de lage waarde voor $A(d)$ die door de S-implicatoren veel meer in reenschap wordt gebracht dan door de residuele. Het verschil is het grootst voor I_{T_M} , die $A(d)$ volkomen negeert, en het kleinst voor I_{T_W} , die immers t.z.t. ook een S-implicator is.

Herinner uit Sectie 6.2, dat de motivatie voor M_4 het tellen van de mates is waarin elk record zich als een niet-negatief voorbeeld voordoet. Een voorbeeld

$A(d)$	$B(d)$	I_{SM}	I_{SP}	I_{SW}	I_{TM}	I_{TP}	I_{TW}
0.1	0.2	0.9	0.92	1	1	1	1
0.2	0.1	0.8	0.82	0.9	0.1	0.5	0.9
0.6	0.8	0.8	0.88	1	1	1	1
0.8	0.6	0.6	0.68	0.8	0.6	0.75	0.8
0.5	0.5	0.5	0.75	1	1	1	1
0.2	0.8	0.8	0.96	1	1	1	1
0.8	0.2	0.2	0.36	0.4	0.2	0.25	0.4

Tabel 6.6: Vergelijking van de bijdrage van enkele records tot $M_4(A \Rightarrow B)$.

kan men zoals gezegd niet–negatief noemen zodra het de regel niet tegenspreekt; dus, ofwel bevestigt het de regel, ofwel speelt het geen rol van betekenis. Dit laatste treedt op wanneer $A(d)$ klein is. In dergelijke gevallen identificeren S–implicatoren d als een niet–negatief voorbeeld, terwijl residuele implicatoren het over het hoofd zien voor kleine waarden van $B(d)$. Immers, indien $A(d)$ eerder laag is, dan is doorgaans $N(A(d))$ eerder hoog, en hetzelfde geldt voor $I_{S,N}(A(d), B(d)) = S(N(A(d)), B(d))$. Als we anderzijds een residuele implicator I_T gebruiken, dan zoeken we, gelet op de definitie van I_T , naar de grootste waarde λ in $[0, 1]$ zo dat $T(A(d), \lambda) \leq B(d)$. Als $A(d) \leq B(d)$ dan is λ gelijk aan 1 en wordt de record correct geïdentificeerd als een niet–negatief voorbeeld. Indien anderzijds $A(d)$ laag is en $B(d)$ nóg lager, dan verlaten we ons in zekere zin op λ om $T(A(d), \lambda)$ ervan te weerhouden $B(d)$ te overtreffen. Als gevolg daarvan zijn de toegelaten waarden voor λ eerder aan de lage kant (i.h.b. als T groot is), waardoor d ten onrechte niet wordt geclassificeerd als een niet–negatief voorbeeld.

Men dient er zich dus terdege van bewust te zijn dat als men een residuele implicator zoals I_{TM} gebruikt voor het bepalen van $D_{imp}(A \Rightarrow B)$, bepaalde records die in een hoge mate irrelevant zijn (A niet bevatten), niet in rekening worden gebracht.

Wat er ook van zij, bij de keuze tussen D_{imp} en $conf$ als maat voor de betrouwbaarheid van de regel $A \Rightarrow B$, moet men overwegen dat eerstgenoemde maat (ongeacht of men nu een S– dan wel een R–implicator gebruikt) gevoelig is voor schommelingen in het aantal irrelevante voorbeelden; i.e. hoe meer records die A in een kleine mate bevatten, hoe hoger $D_{imp}(A \Rightarrow B)$. In het meest pessimistische geval bevat de datatabel enkel irrelevante voorbeelden (voor alle d is $A(d) = 0$), waaruit

$$D_{imp}(A \Rightarrow B) = 1$$

wat, tegen alle verwachtingen in, zou aangeven dat dit een zeer betrouwbare regel is. Maar in dergelijk scenario zijn er evenmin positieve voorbeelden, zodat $supp(A \Rightarrow B) = 0$ is. Hieruit kunnen we afleiden dat het gebruik van D_{imp} enkel zinvol is als de regel voldoende ondersteuning geniet, i.e. $supp(A \Rightarrow B) \geq$

minsupp , met $\text{minsupp} > 0$.

6.14 Opmerking. Het is interessant om te vermelden dat in [80], Hüllermeier de maat D_{imp} reeds invoerde³, merkwaardig genoeg als een alternatief voor de klassieke ondersteuningsmaat supp . De aangevoerde motivatie bestond erin dat een record d met $A(d) = 0.6$ en $B(d) = 0.4$ slechts in de mate 0.4 bijdraagt tot de klassieke ondersteuningsmaat supp gedefinieerd a.d.h.v. T_M . Dit ervoer de auteur als te laag, daar “[d] *does hardly violate (and hence supports) the rule*”. [82] Met de eerste stelling kunnen we akkoord gaan (d is een niet-negatief voorbeeld in een hoge mate), maar de tweede strookt niet met onze eerder gemaakte vaststelling dat een niet-negatief voorbeeld niet noodzakelijk een positief voorbeeld is. Hoewel an sich de introductie van implicatoren in de kwaliteitsmaten zinvol is, respecteert Hüllermeiers redenering niet het fundamentele onderscheid tussen positieve en niet-negatieve voorbeelden, wat duidelijk aan het licht komt wanneer men de records bekijkt die ons niet echt iets bijbrengen omtrent de regel (i.e. degene met een lage lidmaatschapsgraad in A). Inderdaad, wanneer $A(d) = 0$, dan is $I(A(d), B(d)) = 1$, ongeacht de waarde van $B(d)$, wat überhaupt niet strookt met onze verwachting van een positief voorbeeld. Om met dit probleem van “triviale ondersteuning” om te gaan, suggereerde Hüllermeier de ondersteuningsmaat om te vormen tot

$$\text{supp}_2(A \Rightarrow B) = \sum_{d \in D} T(A(d), I(A(d), B(d)))$$

Echter, wanneer men voor I de residuele implicator geïnduceerd door een continue t -norm T kiest, dan blijkt (zie o.m. [108])

$$\text{supp}_2(A \Rightarrow B) = \sum_{d \in D} \min(A(d), B(d))$$

als gevolg waarvan Hüllermeiers ondersteuningsmaat zich herleidt tot de klassieke en in die zin niets nieuws toevoegt aan de discussie. Om die reden zijn we het ook oneens met de hypothese in [55] dat terwijl de traditionele ondersteuningsmaat supp in overeenstemming is met conjunctiegebaseerde regels, de maat supp_2 zou aansluiten bij het gedachtengoed rond implicatiegebaseerde regels. De volgende paragraaf gaat nader in op deze kwestie.

6.3.3 Implicatie- of Conjunctiegebaseerde Vaagregels?

Het nut van de op t -normen en implicatoren gebaseerde kwaliteitsmaten wordt duidelijk wanneer we de constructie van conjunctie- en implicatiegebaseerde vaagregels bij de uiteenzetting betrekken. Immers, gesteld dat

$$\text{supp}(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} (A \cap_T B)(d)$$

³In feite ging het om een ongeschaalde versie van deze maat, d.w.z. de deling door $|D|$ werd achterwege gelaten; dit speelt met het oog op onze uiteenzetting echter geen bijzondere rol.

hoog is, en X en Y de kwantitatieve attributen voorstellen waarmee de respectieve vaagverzamelingen A en B zijn geassocieerd (cfr. Voorbeeld 6.3), dan kan de uitdrukking

$$\text{“Als } X \text{ is } A \text{ dan } Y \text{ is } B\text{”}$$

gelezen worden als een garanderende, positieve vaagregel—records die voldoen aan A én aan B werden immers expliciet en frequent geobserveerd. Het ligt tevens voor de hand om de regel vorm te geven als vaagrelatie R aan de hand van de t-norm T , i.e. , voor (u, v) in $U \times V$,

$$R(u, v) = T(A(u), B(v))$$

Een analoge redenering kan gemaakt worden voor implicatiegebaseerde vaagregels, waarbij men de afwezigheid van tegenvoorbeelden afleest uit de maat

$$D_{imp}(A \Rightarrow B) = \frac{1}{|D|} \sum_{d \in D} I(A(d), B(d))$$

Opnieuw dient men echter beducht te zijn voor het fenomeen van de irrelevante voorbeelden. Om die reden is het pas aangewezen om een beperkende negatieve regel a.d.h.v. de vaagrelatie R gegeven als, voor (u, v) in $U \times V$,

$$R(u, v) = I(A(u), B(v))$$

te genereren, zodra ook de ondersteuning voor deze regel voldoende groot is.

Samenvatting

Een vaak weerkerend thema binnen kunstmatige intelligentie betreft de vraag: hoe kunnen we machines laten denken en handelen zoals mensen? Mensen hebben immers een opmerkelijk vermogen om efficiënt om te gaan met de inherente complexiteit van het dagelijkse leven dat de overgrote meerderheid van de hedendaagse computerimplementaties, die zich vooral laten gelden door precisie en snelheid van berekening, ontbreekt. Opdat een machine menselijk gedrag zou kunnen emuleren dient ze abstractie te maken van overbodige details en zich in de eerste plaats te concentreren op informatiegranules, dit zijn computationeel handelbare en betekenisvolle symbolische entiteiten die de (vaak onvolledig gekende) ingrediënten van een gegeven probleem voorstellen. Als een eenvoudig voorbeeld kan men de functionele verbanden binnen een grote databank samenvatten a.d.h.v. beknopte en gemakkelijk begrijpbare uitspraken zoals “de meeste bedienden van middelbare leeftijd hebben een behoorlijk inkomen”; in dit geval zijn de informatiegranules dus woorden uit de natuurlijke taal, zoals “de meeste”, “middelbare leeftijd” “behoorlijk”. “Rekenen met woorden” (Computing with Words), zoals dit raamwerk ook genoemd wordt, vereist een expliciete interface tussen het abstracte symbolische niveau (i.e. talige of linguïstische termen) en een concrete, onderliggende numerieke representatie.

In dit proefschrift hebben we, bij het lenigen van die nood, het uitgangspunt gehanteerd dat kennis een tweezijdig begrip is: i.e., met elk (imprecies) concept komt een positieve en een negatieve zijde overeen die niet noodzakelijk elkaars complement hoeven te zijn, en dus idealiter afzonderlijk worden gemodelleerd. Diverse wiskundige modellen van imprecisie beantwoorden aan deze visie; het nagaan van hun onderlinge verbanden en verschillen, hun verhouding tot het concept tweezijdigheid en het uitbuiten van het vermogen tot hybridisering die ze bieden, vormden het voornaamste oogmerk van dit proefschrift.

Na een bondige situering en motivatie van ons werk in Hoofdstuk 1, kwamen in Hoofdstuk 2 in eerste instantie de logische en ordetheoretische fundamenten voor het proefschrift aan bod, met name: partieel geordende verzamelingen en tralies, logische connectieven op tralies, geresidueerde tralies, MV-algebra's en bitralies. Daarna hebben we de lezer vertrouwd gemaakt met de belangrijkste tweezijdige verzamelingtheoretische modellen van imprecisie, te weten: intervalwaardige en intuïtionistische vaagverzamelingen, wazigverzamelingen, ruwverzamelingen en tweevoudige (vaag)verzamelingen. Dat laatstgenoemde objecten gelden als een specifieke invulling van het begrip “veralgemeende ruwverzame-

ling”, was één van de opmerkelijke resultaten die aan het licht kwamen bij het in kaart brengen van de onderlinge verhoudingen tussen de modellen.

Hoofdstuk 3 ging uitgebreid in op intuïtionistische en intervalwaardige vaagverzamelingen, die we beide vormelijk kunnen interpreteren als L^* -vaagverzamelingen. Na een studie van de eigenschappen en representatie van logische en verzamelingtheoretische connectieven in dit raamwerk, waarbij we door de introductie van niet- en pseudo t -representeerbare t -(co)normen en implicatoren een nieuwe wind lieten waaien, spitste onze aandacht zich toe op de constructie van inclusiematen, waarvoor we logisch- en verzamelinggebaseerde, directe en indirecte aanpakken definieerden en onderscheidden; we brachten daarbij een belangrijk verband tussen de semantiek van de gegenereerde inclusiematen en het al dan niet t -representeerbaar zijn van de gebruikte connectieven aan het licht. Daarna bestudeerden we het L^* -vaag direct en superdirect beeld, en pasten de theoretische resultaten in in de voorstelling van linguïstische wijzigers. Tenslotte hebben we haarfijn de verhouding ontleed van intuïtionistische en intervalwaardige vaagverzamelingen m.b.t. tweezijdigheid, binnen een uitgebreid kader waarin o.m. ook bitralies en hogere-orde vaagverzamelingen aan bod kwamen. In het bijzonder toonden we aan hoe intuïtionistische vaagverzamelingen, hoewel ze intuïtief nauwer aansluiten bij bitralies, door de beperkingen die ze zichzelf opleggen onvermijdelijk in een intervalwaardig vaarwater belanden.

In Hoofdstuk 4 onderzochten we de mogelijkheden tot onderlinge hybridisering tussen vaag- en ruwverzamelingen. We onderwierpen de gangbare definities aan een kritisch onderzoek en stelden vast dat een daarbij erg belangrijke verworvenheid, namelijk het feit dat elementen tot *meerdere* voorverzamelingen van een vaagrelatie kunnen behoren, niet of nauwelijks wordt uitgebuit. We lanceerden daarom alternatieve definities voor de onder- en bovenbenadering van een vaagverzameling in een vaagbenaderingsruimte, waarvan we het concrete nut illustreerden bij het verwerken van zoekopdrachten in grote datavolumes zoals het WWW.

Benaderend redeneren vormde het hoofdingrediënt van Hoofdstuk 5, waarbij we a.d.h.v. het generieke patroon van de Veralgemeende Modus Ponens diverse inferentiestrategieën met elkaar hebben vergeleken op het vlak van efficiëntie en expressiviteit. We zochten daarbij nadrukkelijk aansluiting bij een recente trend, die op het niveau van de verwerking van informatie, en gezien vanuit de possibiliteitsleer, een onderscheid oplegt tussen positieve of geobserveerde regels, en negatieve of beperkende regels. We argumenteerden hoe deze tweezijdige visie toelaat om bepaalde hardnekkige misverstanden en tekortkomingen van “klassieke” methodes bij te stellen. Om de complexiteit van de algoritmen in te perken zonder in te boeten aan uitdrukingskracht, hebben we inclusiegebaseerd redeneren geïntroduceerd, dat terzelfder tijd ook als een semantisch zeer aantrekkelijke invulling van het begrip “redeneren door analogie” geldt.

In Hoofdstuk 6 tenslotte bestudeerden we de ontginning van vaagassociatieregels uit data. Onze uiteenzetting liet een helder licht stralen omtrent de semantiek van de kwaliteitsmaten die worden gebruikt om dergelijke regels te beoordelen. In het bijzonder stelden we alternatieve betrouwbaarheidsmaten voor, gemotiveerd in termen van positieve en negatieve voorbeelden, die o.m. op een

elegante wijze aanleiding geven tot de voorstelling van de bekomen associatie als positieve of negatieve vaagregel binnen een regelgebaseerd systeem.

Abstract

A frequently recurring theme in artificial intelligence is: how can we make machines think and act like humans? People have a vast talent for dealing effectively with the inherent complexity of everyday life which the majority of present-day computer implementations, whose major assets are precision and speed of computation, lack. To allow a machine to mimic human behaviour, we need to instruct it to abstract from superfluous details and to operate instead on so-called information granules, computationally workable yet meaningful symbolic entities that represent the (often incompletely known) ingredients to a given problem. As a simple example, functional relationships in a large database can often be summed up concisely using easy-to-grasp statements like “most middle-aged employees have a considerable income”; in this case, the information granules are words from natural language, like “most”, “middle-aged” and “considerable”. “Computing with words”, as this framework is called, requires an explicit interface between the abstract symbolic level (i.e. linguistic terms) and a concrete underlying, numerical representation.

In this dissertation, to meet these needs, we have embraced the fundamental principle that knowledge is a two-sided notion: i.e., to each (imprecise) concept correspond a positive and a negative side which need not be each other's complement, and hence which are ideally modelled separately. Various mathematical models of imprecision embody this vision; to investigate their mutual similarities and differences, their relationship to the concept of two-sidedness, and to exploit their potential for hybridization, were the main objectives of this dissertation.

After a brief introduction and motivation of our work in Chapter 1, in Chapter 2 we first reviewed the logical and order-theoretical fundamentals for our dissertation: partially ordered sets and lattices, logical connectives defined on lattices, residuated lattices, MV-algebras and bilattices. Next, we familiarized the reader with the quintessential two-sided set-theoretical models of imprecision: interval-valued and intuitionistic fuzzy sets, flou sets, rough sets and twofold (fuzzy) sets. The fact that the latter objects can be seen as a specific kind of “generalized rough sets” was one of the remarkable results that a comparative study of these models revealed.

Chapter 3 went deep into the matter of intuitionistic and interval-valued fuzzy sets, both of which we could formally interpret as L^* -fuzzy sets. After examining the properties and representations of logical and set-theoretical con-

nectives within this framework, in which the introduction of non- and pseudo t -representable t -(co)norms and implicators meant a radical departure from traditional approaches, we focussed our attention on the construction of inclusion measures—both logic- and set-based, direct and indirect approaches were defined and distinguished; in doing so, we brought to light the very important relationship between the semantics of the generated inclusion measures and the t -representability of the used connectives. Next, we have studied the L^* -fuzzy direct and superdirect images; the theoretical results were applied to the representation of linguistic modifiers. Finally, we have scrupulously analysed the relationship of intuitionistic and interval-valued fuzzy sets w.r.t. two-sidedness, in an extended framework that also featured bilattices and higher-order fuzzy sets. In particular, we have revealed how intuitionistic fuzzy sets, which are intuitively very much in the spirit of bilattices, by the restrictions they impose on themselves, inevitably coincide with interval-valued fuzzy sets.

In Chapter 4, we have investigated the opportunities for hybridization between fuzzy and rough sets. We subjected existing definitions to a critical investigation that revealed that one of the most important aspects of fuzziness, namely that elements can belong to *several* foresets of a fuzzy relation at the same time, has not or scarcely been exploited. For this reason, we have launched alternative definitions for the lower and upper approximations of a fuzzy set in a fuzzy approximation space, whose immediate use we illustrated in the context of processing queries to large data volumes such as the WWW.

Approximate reasoning formed the key topic in Chapter 5, where in view of the generic pattern of the generalized modus ponens, we have compared various inference strategies w.r.t. efficiency and expressivity. Our work was guided explicitly by a recent trend that, at the level of information processing seen from the point of view of possibility theory, imposes a distinction between positive or observed rules, and negative or restrictive rules. We have argued how this two-sided view allows to mend certain persistent misunderstandings and shortcomings of “classical” methods. To curtail algorithm complexity without sacrificing expressivity, we have introduced inclusion-based approximate reasoning, which at the same time also offers a semantically very attractive implementation to the concept of “reasoning by analogy”.

Finally, in Chapter 6 we have studied fuzzy association rule mining from data. Our exposition has shed a crystal-clear light on the semantics of quality measures that are used to judge such rules. Concretely, we have proposed alternative measures of confidence, motivated in terms of positive and negative examples, that, amongst other things, allow for an elegant way of representing discovered associations as positive or negative fuzzy rules in a rule-based system.

Bibliografie

- [1] R. Agrawal, T. Imielinski, A. Swami (1993), “Mining association rules between sets of items in large databases”, Proceedings of ACM SIGMOD conference on Management of Data, 207–216.
- [2] C. Alsina (1985), “On a family of connectives for fuzzy sets”, Fuzzy Sets and Systems **16**(3), 231–235.
- [3] K. T. Atanassov (1983), “Intuitionistic fuzzy sets”, VII ITKR’s Session, Sofia (in het Bulgaars).
- [4] K. T. Atanassov (1989), “More on intuitionistic fuzzy sets”, Fuzzy Sets and Systems **33**(1), 37–46.
- [5] K. T. Atanassov (1993), “A second type of intuitionistic fuzzy sets”, BUSEFAL **54**, 4–8.
- [6] K. T. Atanassov (1999), “Intuitionistic fuzzy sets”, Physica–Verlag, Heidelberg–New York.
- [7] K. T. Atanassov (2003), “Intuitionistic fuzzy sets—past, present and future”, Proceedings of Third International Conference in Fuzzy Logic and Technology (M. Wagenknecht, R. Hampel, eds.), 12–19.
- [8] K. T. Atanassov, S. Stoeva (1984), “Intuitionistic L -fuzzy sets”, Cybernetics and Systems Research **2**, 539–540.
- [9] W. Bandler, L. Kohout (1980), “Fuzzy power sets and fuzzy implication operators”, Fuzzy Sets and Systems **4**, 13–30.
- [10] D. Batens (2001), “A general characterization of adaptive logics”, Logique et Analyse **173–175**, 45–68.
- [11] N. Belnap (1977), “A useful four-valued logic”, Modern Uses of Multiple-Valued Logics (D. Reidel, ed.), 8–37.
- [12] G. Birkhoff (1973), “Lattice theory”, AMS Colloquium Publications, Volume XXV, American Mathematical Society, Providence, RI, 3^e editie, 2^e druk (1^e editie: 1940).

- [13] U. Bodenhofer (2001), “Generalized opening and closure operators of fuzzy relations”, *Proceedings of Second International ICSC–NAISO Congress on Computational Intelligence: Methods and Applications*, 677–683.
- [14] D. Boixader (1998), “Some properties concerning the quasi-inverse of a t -norm”, *Mathware and Soft Computing* **5**(1), 5–12.
- [15] D. Boixader, J. Jacas (1998), “Extensionality-based approximate reasoning”, *International Journal of Approximate Reasoning* **19**(3), 221–230.
- [16] D. Bolinger (1972), “Degree words”, Mouton, Den Haag.
- [17] D. Botteldooren, A. Verkeyn, C. Cornelis, M. De Cock (2002), “On the meaning of noise annoyance modifiers: a fuzzy set theoretical approach”, *Acta Acustica* **88**, 239–251.
- [18] B. Bouchon–Meunier, D. Dubois, L. Godo, H. Prade (1999), “Fuzzy sets and possibility theory in approximate and plausible reasoning”, *Fuzzy sets in approximate reasoning and information systems*, Kluwer Academic Publishers, 15–190.
- [19] B. Bouchon–Meunier, R. Mesiar, C. Marsala, M. Rifqi (2003), “Compositional rule of inference as an analogical scheme”, *Fuzzy Sets and Systems* **138**(1), 53–65.
- [20] J. J. Buckley, Y. Hayashi (1994), “Can approximate reasoning be consistent?”, *Fuzzy sets and systems*, **65**(1), 13–18.
- [21] H. Bustince (2000), “Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets”, *International Journal of Approximate Reasoning* **23**(3), 137–209.
- [22] G. Cattaneo, D. Ciucci (2002), “Heyting Wajsberg algebras as an abstract environment linking fuzzy and rough sets”, *Lecture Notes in Artificial Intelligence* **2475**, 77–84.
- [23] G. Cattaneo, D. Ciucci (2003), “Generalized negations and intuitionistic fuzzy sets—a criticism to a widely used terminology”, *Proceedings of Third International Conference in Fuzzy Logic and Technology* (M. Wagenknecht, R. Hampel, eds.), 147–152.
- [24] G. Cattaneo, D. Ciucci (2003), “Intuitionistic fuzzy sets or orthopair fuzzy sets”, *Proceedings of Third International Conference in Fuzzy Logic and Technology* (M. Wagenknecht, R. Hampel, eds.), 153–158.
- [25] G. Chen, P. Yan, E. E. Kerre (2003), “Computationally efficient mining for fuzzy implication-based association rules in quantitative databases”, *International Journal of General Systems, ter perse*.
- [26] D. Çoker (1998), “Fuzzy rough sets are intuitionistic L -fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems* **96**(3), 381–383.

- [27] C. Cornelis, K. T. Atanassov, E. E. Kerre (2003), "Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: a critical comparison", *Proceedings of Third International Conference in Fuzzy Logic and Technology* (M. Wagenknecht, R. Hampel, eds.), 159–163.
- [28] C. Cornelis, M. De Cock, D. Botteldooren, E. E. Kerre (2001), "Fuzzy set theory: a useful interlingua?", *Proceedings of KES'01*, (N. Baba, L.C. Jain, R.J. Howlett eds.), 1137–1141.
- [29] C. Cornelis, M. De Cock, E. E. Kerre (2002), "Linguistic hedges in an intuitionistic fuzzy setting", *Proceedings of First International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery* (L. Wang, S. Halgamuge, X. Yao, eds.), 101–105.
- [30] C. Cornelis, M. De Cock, M., E. E. Kerre (2003), "Intuitionistic fuzzy rough sets: on the crossroads of imperfect knowledge", *Expert Systems* **20**(5), 260–270.
- [31] C. Cornelis, G. Deschrijver (2001), "The compositional rule of inference in an intuitionistic fuzzy logic framework", *Proceedings of ESSLLI 2001 Student Session*, (Kristina Striegnitz, ed.), Kluwer Academic Publishers, 83–94.
- [32] C. Cornelis, G. Deschrijver, M. De Cock, E. E. Kerre (2002) "Intuitionistic fuzzy relational calculus: an overview", *Proceedings of First International IEEE Symposium "Intelligent Systems"*, 340–345.
- [33] C. Cornelis, G. Deschrijver, E. E. Kerre (2002), "Classification of intuitionistic fuzzy implicators: an algebraic approach", *Proceedings of 6th Joint Conference on Information Sciences* (H. J. Caulfield, S. Chen, H. Chen, R. Duro, V. Honavar, E. E. Kerre, M. Lu, M. G. Romay, T. K. Shih, D. Ventura, P. P. Wang, Y. Yang, eds.), 105–108.
- [34] C. Cornelis, G. Deschrijver, E. E. Kerre (2003), "Square and triangle: reflections on two prominent mathematical structures for the representation of imprecision", *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets* **9**(3), 11–21.
- [35] C. Cornelis, G. Deschrijver, E. E. Kerre (2003), "Implication in intuitionistic and interval-valued fuzzy set theory: construction, classification, application", *International Journal of Approximate Reasoning* **35**(1), 55–95.
- [36] C. Cornelis, E. E. Kerre (2001), "Inclusion-based approximate reasoning", *Lecture Notes in Computer Science* **2074** (V. Alexandrov, J. Dongarra, B. Juliano, R. Renner, C. Tan, eds.), Part II, Springer-Verlag, 221–230.
- [37] C. Cornelis, E. E. Kerre (2001), "A fuzzy inference methodology based on the fuzzification of set inclusion", *Recent Advances in Intelligent Paradigms and Applications*, (A. Abraham, L. Jain, J. Kacprzyk, eds.), Physica-Verlag, 71–89.

- [38] C. Cornelis, E. E. Kerre (2002) “On the structure and interpretation of an intuitionistic fuzzy expert system”, *Proceedings of EUROFUSE 2002* (B. De Baets, J. Fodor, G. Pasi, eds.), 173–178.
- [39] C. Cornelis, E. E. Kerre (2003), “Inclusion measures in intuitionistic fuzzy set theory”, *Lecture Notes in Computer Science (Subseries LNAI)* **2711** (T. D. Nielsen, N.L. Zhang, eds.), Springer-Verlag, 345–356.
- [40] C. Cornelis, C. Van Der Donck, E. E. Kerre (2003), “Sinha–Dougherty approach to the fuzzification of set inclusion revisited”, *Fuzzy Sets and Systems*, **134**(2), 283–295.
- [41] S. K. De, R. Biswas, A. R. Roy (2000), “Some operations on intuitionistic fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems* **114**(3), 477–484.
- [42] B. De Baets (1994), “Het oplossen van vaagrelationele vergelijkingen: een ordetheoretische benadering”, *Doctoraatsproefschrift*, Universiteit Gent.
- [43] B. De Baets (1995), “Model implicators and their characterization”, *Proceedings of the International ICSC Symposium on Fuzzy Logic* (ed. N. C. Steele), Zürich, A42–A49.
- [44] B. De Baets, J. Fodor, P. Perny (2000), “Preferences and decisions under incomplete knowledge”, *Physica–Verlag*, Berlijn.
- [45] B. De Baets, R. Mesiar (1998), “ $\mathcal{T}$ -partitions”, *Fuzzy Sets and Systems* **97**(2), 211–223.
- [46] M. De Cock (2002), “Een grondige studie van linguïstische wijzigers in de vaagverzamelingenleer”, *Doctoraatsproefschrift*, Universiteit Gent.
- [47] M. De Cock, S. Guadarrama, M. Nikraves (2003), “Constructing fuzzy thesauri for the WWW”, *Proceedings of BISC2003 FLINT-CIBI International Joint Workshop on Soft Computing for Internet and Bioinformatics*, ter perse.
- [48] M. De Cock, C. Cornelis, E. E. Kerre (2003), “Fuzzy association rules: a two-sided approach”, *Proceedings of International Conference on Fuzzy Information Processing–Theories and Applications*, 385–390.
- [49] G. De Cooman, E. E. Kerre (1994), “Order norms on bounded partially ordered sets”, *Journal of Fuzzy Mathematics* **2**(2), 281–310.
- [50] B. Delfgaauw, F. Van Peperstraten (1993), “Beknopte geschiedenis van de wijsbegeerte—van Thales tot Lyotard”, Kok Agora, DNB/Pelckmans.
- [51] G. Deschrijver, E. E. Kerre (2003), “Classes of intuitionistic fuzzy t-norms satisfying the residuation principle”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, ter perse.

- [52] G. Deschrijver, C. Cornelis, E. E. Kerre (2002), “Intuitionistic fuzzy connectives revisited”, *Proceedings of 9th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, 1839–1844.
- [53] G. Deschrijver, C. Cornelis, E. E. Kerre (2003), “On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, *ter perse*.
- [54] A. Di Nola, W. Pedrycz, S. Sessa (1989), “An aspect of discrepancy in the implementation of modus ponens in the presence of fuzzy quantities”, *International Journal of Approximate Reasoning* **3**(3), 259–265.
- [55] D. Dubois, E. Hüllermeier, H. Prade (2003), “A note on quality measures for fuzzy association rules”, *Proceedings of IFSA2003*, 346–353.
- [56] D. Dubois, H. Prade (1984), “Fuzzy logics and generalized modus ponens revised”, *International Journal of Cybernetics and Systems* **15**, 293–331.
- [57] D. Dubois, H. Prade (1987), “Twofold fuzzy sets and rough sets—some issues in knowledge representation”, *Fuzzy Sets and Systems* **23**(2), 191–208.
- [58] D. Dubois, H. Prade (1990), “Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets”, *International Journal of General Systems* **17**, 191–209.
- [59] D. Dubois, H. Prade (1996), “What are fuzzy rules and how to use them”, *Fuzzy Sets and Systems* **84**(2), 169–185.
- [60] D. Dubois, H. Prade (2003) “Possibility theory and its applications: a retrospective and prospective view”, *Proceedings of FUZZ–IEEE 2003*.
- [61] D. Dubois, H. Prade, P. Smets (2001) “Not impossible versus guaranteed possible in fusion and revision”, *Proceedings of ECSQARU 2001*, 522–531.
- [62] D. Dubois, H. Prade, L. Ughetto (1997), “Checking the coherence and redundancy of fuzzy knowledge bases”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **5**(3), 398–417.
- [63] D. Dubois, H. Prade, L. Ughetto (2002), “A new perspective on reasoning with fuzzy rules”, *International Journal of Intelligent Systems* **18**(5), 541–563.
- [64] A. Dvořák (1999), “On linguistic approximation in the frame of fuzzy logic deduction”, *Soft Computing* **3**, 111–115.
- [65] M. R. Emami, I. B. Türkşen, A. A. Goldenberg (1999), “A unified parametrized formulation of reasoning in fuzzy modelling and control”, *Fuzzy Sets and Systems* **87**(2), 155–158.

- [66] M. Fitting (1990), “Bilattices in logic programming”, Proceedings of 20th International Symposium on Multiple-Valued Logic (G. Epstein, ed.), IEEE Press, 238–246.
- [67] M. Fitting (1992) “Kleene’s logic generalized”, Journal of Logic and Computation, **1**, 797–810.
- [68] J. C. Fodor (1994), “Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [69] J. C. Fodor (1995), “Contrapositive symmetry of fuzzy implications”, Fuzzy Sets and Systems **69**(2), 141–156.
- [70] J. C. Fodor, J., R. R. Yager (2000), “Fuzzy set theoretic operators and quantifiers”, Fundamentals of Fuzzy Sets (D. Dubois, H. Prade, eds.), Kluwer, Boston, Mass., 125–193.
- [71] P. Fortemps, R. Slowinski (2002), “A graded quadrivalent logic for ordinal preference modelling: Loyola-like approach”, Fuzzy Optimization and Decision Making **1**, 93–111.
- [72] E. Freeman, ed. (1983), “The relevance of Charles Peirce”, La Salle, IL, Monist Library of Philosophy.
- [73] Y. Gentilhomme (1968), “Les ensembles flous en linguistique”, Cahiers de Linguistique Théorétique et Appliquée, Bucarest, V 47.
- [74] M. Gehrke, C. Walker, E. Walker (1996), “Some comments on interval-valued fuzzy sets”, International Journal of Intelligent Systems **11**(10), 751–759.
- [75] M. L. Ginsberg (1988), “Multi-valued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence”, Computer Intelligence **4**, 256–316.
- [76] J. Goguen (1967) “L-fuzzy sets”, J. Math. Anal. Appl. **18**, 145–174.
- [77] M. B. Gorzalczany (1987), “A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy sets and systems **21**(1), 1–17.
- [78] A. Gyenesi (2000), “A fuzzy approach for mining quantitative association rules”, TUCS technical report 336, Universiteit Turku, Finland.
- [79] S. Haack (1978), “Philosophy of logics”, Cambridge University Press.
- [80] E. Hüllermeier (2001), “Fuzzy association rules: semantic issues and quality measures”, Computational Intelligence: Theory and Applications; Proceedings of the 7th Fuzzy Days Dortmund, Ed. B. Reusch; Lecture Notes in Computer Science **2206**, Springer, 380–391.

- [81] E. Hüllermeier (2001), "Implication-based fuzzy association rules", Proceedings of Fifth European Conference on Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases, 241–252.
- [82] E. Hüllermeier (2002), "Mining implication-based fuzzy association rules in databases", Proceedings of Ninth International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Volume I, 101–108.
- [83] T. B. Iwinski (1987), "Algebraic approach to rough sets", Bull. Polish Acad. Sci. Math. **35**, 673–683.
- [84] S. Jenei (1997), "A more efficient method for defining fuzzy connectives", Fuzzy Sets and Systems **90**(1), 25–35.
- [85] R. John (1998) "Type 2 fuzzy sets: an appraisal of theory and applications", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, **6**(6), 563–576.
- [86] E.E. Kerre (1992), "A walk through fuzzy relations and their applications to information retrieval, medical diagnosis and expert systems", Analysis and Management of Uncertainty: Theory and Applications (B. M. Ayyub, M. M. Gupta, L. N. Kanal, eds.), Elsevier Science Publishers, 141–151.
- [87] E.E. Kerre (1993), "Introduction to the Basic Principles of Fuzzy Set Theory and Some of its Applications", Communication and Cognition.
- [88] E.E. Kerre (1999), "Fuzzy sets and approximate reasoning", XianJiaotong University Press.
- [89] L. Kitainik (1993), "Fuzzy decision procedures with binary relations", Kluwer, Dordrecht, the Netherlands.
- [90] F. Klawonn, V. Novak (1996), "The relation between inference and interpolation in the framework of fuzzy systems", Fuzzy Sets and Systems **81**(3), 331–354.
- [91] G. J. Klir, B. Yuan (1995), "Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications", Prentice Hall PTR.
- [92] J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, A. Skowron (1999), "Rough sets: a tutorial", Rough Fuzzy Hybridization: A New Trend in Decision-Making (Pal S. K., Skowron A., ed.), Springer-Verlag, Singapore.
- [93] B. Kosko (1986), "Fuzzy entropy and conditioning", Information Sciences **40**, 165–174.
- [94] R. Lawrence (2002), "Little book of yin & yang", Thorsons.
- [95] Y. Liu, E. E. Kerre (1998), "An overview of fuzzy quantifiers", Fuzzy Sets and System **95**(1), 1–21.

- [96] G. J. C. Lokhorst (1995), "Fuzzy logic", Computational Intelligence: Fuzzy logic en neurale netwerken, Proceedings Symposium Elektrotechniek, Delft, Electrotechnische Vereniging.
- [97] E. H. Mamdani, S. Assilian (1975), "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller", International Journal of Man-Machine Studies **7**, 1–13.
- [98] J. M. Mendel (2001) "Uncertain rule-based fuzzy logic systems", Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey.
- [99] S. Miyamoto (1990), "Information retrieval based on fuzzy associations", Fuzzy Sets and System **38**(2), 191–206.
- [100] D. Mcneill, P. Freiburger (1994), "Fuzzy logic", Uitgeverij Bodoni, Baarn.
- [101] S. Mohaghegh (2000), "Virtual intelligence applications in petroleum engineering: Part 3 ; Fuzzy Logic", Journal of Petroleum Technology, Distinguished Author Series, 82–87.
- [102] J. Montero, D. Gómez (2003), "Preferences, classification and intuitionistic fuzzy sets", Proceedings of Third International Conference in Fuzzy Logic and Technology (M. Wagenknecht, R. Hampel, eds.), 187–192.
- [103] M. Nachtegaal (2002), "Vaagmorfologische en vaaglogische filtertechnieken in beeldverwerking", Doctoraatsproefschrift, Universiteit Gent.
- [104] M. Nachtegaal, D. Van Der Weken, E. E. Kerre (2000), "Het gebruik van similariteitsmaten in beeldverwerking", Technisch rapport, Universiteit Gent.
- [105] S. Nanda, S. Majumdar (1992), "Fuzzy rough sets", Fuzzy Sets and Systems **45**(2), 157–160.
- [106] H. T. Nguyen, V. Kreinovich, Q. Zuo (1997) "Interval-valued degrees of belief: applications of interval computations to expert systems and intelligent control", International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems **5**(3), 317–358.
- [107] M. Nikolova, N. Nikolov, C. Cornelis, G. Deschrijver (2002), "Survey of the research on intuitionistic fuzzy sets", Advanced Studies in Contemporary Mathematics **4**(2), 127–157.
- [108] V. Novak, I. Perfilieva, J. Močkoř (1999), "Mathematical principles of fuzzy logic", Kluwer Academic Publishes, Dordrecht.
- [109] Z. Pawlak (1982), "Rough sets", International Journal of Computer and Information Sciences **11**(5), 341–356.
- [110] Z. Pawlak (1985), "Rough sets and fuzzy sets", Fuzzy Sets and Systems **17**(1), 99–102.

- [111] A. M. Radzikowska, E. E. Kerre (2002), "A comparative study of fuzzy rough sets", *Fuzzy Sets and Systems* **126**(2), 137–156.
- [112] D. Ruan, E. E. Kerre (1993), "On the extension of the compositional rule of inference", *International Journal of Intelligent Systems* **8**, 807–817.
- [113] R. Sambuc (1975) "Fonctions Φ -floues. Application à l'aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne", doctoraatsproefschrift, Université de Marseille.
- [114] B. Schweizer, A. Sklar (1961), "Associative functions and statistical triangle inequalities", *Publ. Math. Debrecen* **8**, 169–186.
- [115] D. Sinha, E. R. Dougherty (1993), "Fuzzification of set inclusion: theory and applications", *Fuzzy Sets and Systems* **55**(1), 15–42.
- [116] F. Smarandache (2002), "Neutrosophy, a new branch of philosophy", *Multiple Valued Logic* **8**(3), 297–384.
- [117] P. Smets, P. Magrez (1989), "Implication in fuzzy logic", *International Journal of Approximate Reasoning* **1**(4), 327–347.
- [118] M. Spott (1999), "A theory of possibility distributions", *Fuzzy Sets and Systems* **102**(2), 135–155.
- [119] R. Srikant, R. Agrawal (1996), "Mining quantitative association rules in large relational tables", *Proceedings of ACM SIGMOD Conference on Management of Data*, v.25 n.2, 1–12.
- [120] E. Szmidt, J. Kacprzyk (2001), "Entropy for intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, **118**(3), 467–477.
- [121] P. N. Tan, V. Kumar, J. Srivastava (2002), "Selecting the right interestingness measure for association patterns", *Proceedings of the Eighth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Edmonton, 32–41.
- [122] H. Thiele (1998), "Fuzzy rough sets versus rough fuzzy sets—an interpretation and a comparative study using concepts of modal logic", Technical Report ISSN 1433-3325, Universität Dortmund.
- [123] H. Thiele (2001), "Generalizing the explicit concept of rough set on the basis of modal logic", *Computational Intelligence in Theory and Practice* (B. Reusch, K. H. Temme eds.), Physica Verlag, Berlin–Heidelberg–New York.
- [124] E. Tsiporkova, H. J. Zimmermann (1998), "Aggregation of compatibility and equality: a new class of similarity measures for fuzzy sets", *Proceedings of IPMU-Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems Seventh International Conference*, 1769–1776.

- [125] A. Tsoukiàs (2002), “A first order, four-valued, weakly paraconsistent logic and its relation with rough sets semantics”, *Foundations of Computing and Decision Sciences* **27**, 77–96.
- [126] I. B. Türkşen (1986) “Interval valued fuzzy sets based on normal forms”, *Fuzzy sets and systems*, **20**(2), 191–210.
- [127] I. B. Türkşen, Z. Zhong (1990) “An approximate analogical reasoning schema based on similarity measures and interval-valued fuzzy sets”, *Fuzzy sets and systems* **34**(3), 323–346.
- [128] E. Turunen (1999), “Mathematics behind fuzzy logic”, *Advances in Soft Computing*. Physica-Verlag, Heidelberg.
- [129] W. Van Leekwijck, E. E. Kerre (1999), “Defuzzification: criteria and classification”, *Fuzzy Sets and Systems* **108**(2), 159–178.
- [130] P. Walley (1991) “Statistical reasoning with imprecise probabilities”, Chapman and Hall.
- [131] G. Wang, Y. He (2000), “Intuitionistic fuzzy sets and L -fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems* **110**(2), 271–274.
- [132] J. Weisbrod (1998), “A new approach to fuzzy reasoning”, *Soft Computing* **2**, 89–99.
- [133] J. Weisbrod, M. Spott (2000), “Conditional constraints, implication based rules, and possibilistic rule bases: are they any good?”, Technical Report, Universität Karlsruhe.
- [134] S. K. M. Wong, L. S. Wang (1995), “On modeling uncertainty with interval structures”, *Computational Intelligence* **11**(4), 406–426.
- [135] S. K. M. Wong, W. Ziarko (1987), “Comparison of the probabilistic approximate classification and the fuzzy set model”, *Fuzzy Sets and Systems* **21**(3), 357–362.
- [136] R. Yager (1980), “An approach to inference in approximate reasoning”, *International Journal of Man-Machine Studies* **13**, 323–338.
- [137] R. Yager (2000), “Approximate reasoning and conflict resolution”, *International Journal of Approximate Reasoning* **25**(1), 15–42.
- [138] Y. Y. Yao (1996), “Two views of the theory of rough sets in finite universes”, *International Journal of Approximate Reasoning* **15**(4), 291–317.
- [139] Y. Y. Yao (2003), “Probabilistic approaches to rough sets”, *Expert Systems* **20**(5), 287–297.
- [140] V. Young (1996), “Fuzzy subethood”, *Fuzzy Sets and Systems* **77**(3), 371–384.

- [141] L. A. Zadeh (1965), "Fuzzy sets", *Information and Control* **8**, 338–353.
- [142] L. A. Zadeh (1973), "Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **3**(1), 28–44.
- [143] L. A. Zadeh (1972), "A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hedges", *Journal of Cybernetics* **2**(3), 4–34.
- [144] L. A. Zadeh (1975), "Calculus of fuzzy restrictions", *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive Decision Processes*, Academic Press, 1–40.
- [145] L. A. Zadeh (1978), "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility", *Fuzzy sets and Systems* **1**(1), 3–28.
- [146] R. Zwick, E. Carlstein, D.V. Budescu (1987), "Measures of similarity among fuzzy concepts: a comparative analysis", *International Journal of Approximate Reasoning* **1**(2), 221–242.

Index

- (α, β) -inclusie, 57
- L -vaagrelatie, 31
 - binair, 31
- L -vaagverzameling, 30
 - $\mathcal{N}$ -complement, 30
 - $\mathcal{S}$ -unie, 31
 - $\mathcal{T}$ -doorsnede, 30
 - drager, 31
 - genormaliseerd, 31
 - kern, 31
 - niveauverzameling, 31
- R -voorverzameling, 38
- T -gelijkheidsmaat, 138
- U - V inferentiemethode, 136
- Φ -getransformeerde, 54
- $\mathbb{S}$ -vormfunctie, 75
- φ -getransformeerde, 21, 23
- antisymmetrie, 16
- associatieregels, 150
 - betrouwbaarheid (*conf*), 151
 - gecomplementeerd, 150
 - geldig, 151
 - kwantitatief, 152
 - ondersteuning (*supp*), 151
- beeld
 - direct, 74
 - subdirect, 126
 - superdirect, 74
- behoud van modus ponens, 122
- benaderende gelijkheid, 75, 91
- benaderingsruimte
 - Pawlak, 38
 - vaag-, 88
 - veralgemeend, 40
- biresiduele operator, 137
- bitralie, 28
 - distributief, 29
 - verweefd, 29
- Boole-algebra, 17
- bovenbenadering
 - klassiek, 38
 - streng, 92
 - zwak, 92
- cilindrische extensie, 106
- combinatie, 106
- compositieregel voor inferentie, 106
- conflator, 28
 - geïnduceerd, 83
- consistentie, 120
- de Morgan
 - triplet, 21
 - wetten, 19
- definieerbare verzameling, 38
- defuzzificatie, 108
- discretisering, 133
- driehoek, 84
- elastische restrictie, 43, 105
- equivalentierelatie, 37
 - L^* -vage $\mathcal{T}$ -, 77
 - vage T -, 77
- erfschap, 60
- extensionaliteit, 138
- FATI, 115
- FITA, 115
- gegarandeerde mogelijkheid, 111
- gesloten wereld aanname, 111
- Huntington axioma's, 18, 27

- implicator, 22
 - Lukasiewicz, 22
 - Gödel, 22
 - Goguen, 22
 - model, 23
 - R-implicator, 22
 - rand, 23
 - residuele, 22
 - S-implicator, 22
 - t-representeerbaar, 50
 - veralgemeende Lukasiewicz, 23
- infimum, 16
- inwendige, 42
- kardinaliteit, 69
- linguïstische benadering, 133
- linguïstische wijziger, 72
- modale operator, 57
- modificatie-afbeelding, 141
- MV-algebra, 25
 - deelbaarheid, 25
- naverzameling, 38
- necessiteit, 44
- necessiteit ($\Box$), 57
- necessiteitsdistributie, 44
 - potentiële, 111
- negator, 18
 - Brouwer, 19
 - geïnduceerd, 23
 - involutief, 18
 - Kleene, 19
 - standaard, 19
- onderbenadering
 - klassiek, 38
 - streng, 92
 - zwak, 92
- onderlinge consistentie, 131
- orderrelatie, 16
 - strict, 16
 - totaal, 16
- overlapmaat, 74
- partieel geordende verzameling, 16
- Poincaré paradox, 91
- possibiliteit, 44
- possibiliteit ($\Diamond$), 57
- possibiliteitsdistributie, 43, 109
 - gegarandeerde, 111
- potentiële necesiteit, 111
- pre-bitralie, 28
- principe van maximale specificiteit, 111
- principe van minimale specificiteit, 110
- projectie, 107
- projectie (afbeelding), 48
- reflexiviteit, 16
- residueringsvoorwaarde, 24
- ruwverzameling
 - Pawlak, 38
 - probabilistisch, 87
 - vaag-, 88
- similariteitsmaat, 136
- similariteitsrelatie, 89
- sluiting, 42
- Smets–Magrez axioma's, 23
- sorites, 10
- supremum, 16
- t-conorm, 20
- t-norm, 20
 - archimedis, 20
 - duaal paar, 21
 - links-continu, 24
 - nilpotent, 20
 - pseudo t-representeerbaar, 50
 - representant, 49
 - sterk nilpotent, 53
 - strict, 21
 - t-representeerbaar, 49
- tolerantierelatie, 40
- tralie, 17
 - begrend, 17
 - Brouwer, 19
 - Brouwer–Kleene, 20
 - compleet, 17
 - distributief, 17

- gecomplementeerd, 17
- geresidueerd, 24
- Kleene, 19
- transitiviteit, 16
- triangulaire conorm, 20
- triangulaire norm, 20
- tweetvoudige vaagverzameling, 45
- tweetvoudige verzameling, 42
- vaagregel, 105
 - negatief, 113
 - positief, 113
- vaagregelaar, 107
- vaagthesaurus, 99
- vaagverzameling, 30
 - intervalwaardig, 32
 - intuitionistisch, 33
 - ruw-, 88
 - type-2, 85
- veralgemeende modus ponens, 106
- vierkant, 82
- wazigverzameling, 36
- wet van de contradictie, 10, 19
- wet van het uitgesloten derde, 10, 19